

PGMEC

PROGRAMA FRANCISCO EDUARDO MOURÃO SABOYA DE
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
ESCOLA DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Tese de Doutorado

MODELAGEM E SIMULAÇÃO VIA
FORMULAÇÕES MULTICAMPOS DE
GALERKIN MÍNIMOS-QUADRADOS DE
ESCOAMENTOS INERCIAIS DE FLUIDOS
DE BINGHAM

HILDA PARI SOTO

AGOSTO DE 2010

HILDA PARI SOTO

MODELAGEM E SIMULAÇÃO VIA FORMULAÇÕES
MULTICAMPOS DE GALERKIN MÍNIMOS-
QUADRADOS DE ESCOAMENTOS INERCIAIS DE
FLUIDOS DE BINGHAM

Tese de doutorado apresentado ao
Programa Francisco Eduardo Mourão
Saboya de Pós-graduação em Engenharia
Mecânica da UFF como parte dos
requisitos para a obtenção do título de
Doutor em Ciências em Engenharia
Mecânica

Orientadores: Maria Laura Martins Costa (PGMEC/UFF)
Sérgio Luiz Frey (UFRGS)

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
NITERÓI, 12 DE AGOSTO DE 2010

Ficha Catalográfica elaborada pela Biblioteca da Escola de Engenharia e Instituto de Computação da UFF

S718 Soto, Hilda Pari.

Modelagem e simulação via formulações multicampos de Galerkin mínimos-quadrados de escoamentos inerciais de fluidos de Birgham / Hilda Pari Soto. – Niterói, RJ: [s.n.], 2010.

138 f.

Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal Fluminense, 2010.

Orientador: Maria Laura Martins Costa, Sérgio Luiz Frey.

1. Viscoplasticidade. 2. Método de Galerkin. 3. Escoamento de fluidos. 4. Mínimos quadrados. 5. Modelo de Bingham I. Título.

CDD 531.38

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Justino e Juana

AGRADECIMENTOS

Ao longo destes anos tive a sorte de conhecer e conviver com muitas pessoas que marcaram minha vida. O apoio recebido vai muito além da formação que adquiri nestes anos no campo da mecânica dos fluidos. Gostaria de manifestar minha gratidão a algumas pessoas.

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a minha orientadora, professora Maria Laura Martins Costa. Ela não apenas me introduziu neste tema, mas guiou minha experiência profissional e acadêmica e ajudou-me a construir as oportunidades que vêm surgindo. Ao professor Sérgio Frey, sou grata pelo estímulo e pelas críticas, que feitas no momento certo, permitiram-me superar muitas limitações e atingir o objetivo.

Meus pais são os maiores incentivadores de tudo em minha vida: a eles dedico esta tese.

“In Memoriam” ao meu querido sobrinho Luis Alexander.

Agradeço aos meus irmãos Claver, Andrea Rosario, Esther, Carlos e, especialmente, a Andrea Luisa e Miguel, pelo apoio. Agradeço também a minha nova família no Brasil, Edna, Patricia, Katterine, e meus queridos sobrinhos Guadalupe, Ernesto e Bianca.

Tenho uma dívida de gratidão para meu querido, Jorge Luis, pelo amor e apoio incondicional ao longo destes anos.

Não esqueço de minhas queridas amigas que sempre estiveram presentes nesta empreitada torcendo por mim, Maria Leny Ojeda, Ana

Leiva, Danielle Guerra, Lourdes Inagaki, Simone Pinto e Elizabeth Morales.

Aos meus amigos do PGMEC, Eliane, Jorge Luiz, Rafael, Elkin e Oscar e aos professores e aos meus colegas do LMTA, especialmente Rodrigo, Leonardo, Matherson, Daniel, Marcelo, Marcos, Jorge e Luiz.

Aos colegas do LAMAC-UFRGS, especialmente ao Cleiton e ao Lucas, pela colaboração.

Finalmente, aos colegas de trabalho do LAGAS-INT, em especial a Telma Villela, pela confiança e apoio na fase final da tese.

RESUMO

Este trabalho enfoca aproximações de elementos finitos para o escoamento de fluidos com tensão limite de escoamento através de uma expansão planar abrupta. O modelo mecânico combina as equações de balanço de massa e momentum com o modelo viscoplástico de Bingham, regularizado pela equação de Papanastasiou, descrevendo com uma única equação as regiões materiais escoadas e não escoadas. Uma metodologia de Galerkin mínimos-quadrados (GLS) multicampos, em termos de tensão-extra, velocidade e pressão é empregada na aproximação dos escoamentos. Este método contorna a necessidade de se satisfazer as condições de compatibilidade entre os subespaços de elementos finitos de pressão e velocidade e de tensão e velocidade. Além disso, a escolha apropriada dos parâmetros de estabilização – resíduos dependentes da malha, resultantes da minimização das equações de Euler-Lagrange do problema, adicionados à formulação clássica de Galerkin, aumentando sua estabilidade sem prejudicar sua consistência – torna a metodologia capaz de manter-se estável e precisa em escoamentos sujeitos a altos números de Bingham e de Reynolds. Foram simulados numericamente escoamentos do fluido de Bingham através de uma expansão planar abrupta 1:4. Para escoamentos lentos, investigou-se o efeito da tensão limite de escoamento na dinâmica de materiais viscoplásticos, variando-se o número de Bingham de 0,2 até 100. A seguir, foram considerados os efeitos de inércia variando o número de Reynolds entre 0 e 50. Os resultados caracterizaram com precisão a morfologia das superfícies de escoamento para altos valores do número de Bingham em escoamentos com inércia.

Palavras-chave: Fluidos viscoplásticos, Formulações multicampos de Galerkin mínimos quadrados, Modelo de Bingham regularizado, Efeitos de Inércia, Escoamento com expansão abrupta.

ABSTRACT

This work is concerned with finite element approximations for yield stress fluid flows through a sudden planar expansion. The mechanical model is composed by mass and momentum balance equations, coupled with the Bingham viscoplastic model regularized by Papanastasiou (1987) equation, which describes yielded and unyielded material regions by a single equation. A multi-field Galerkin least-squares (GLS) method in terms of extra-stress, velocity and pressure is employed to approximate the flows. This method is built to circumvent compatibility conditions involving pressure-velocity and stress-velocity finite element subspaces. In addition, thanks to an appropriate design of its stability parameters – mesh-dependent residuals, resulting from the minimization of the Euler-Lagrange equations of the problem, which are added to the classical Galerkin method, enhancing Galerkin stability without upsetting its consistency – this methodology is able to remain stable and accurate in high Bingham and Reynolds flows. Numerical simulations concerning the flows of a regularized Bingham fluid through a one-to-four sudden planar expansion are performed. For creeping flows, yield stress effects on the fluid dynamics of viscoplastic materials are investigated through the ranging of Bingham number from 0.2 to 100. In the sequence, inertia effects are accounted for ranging the Reynolds number from 0 to 50. The numerical results are able to characterize accurately the morphology of yield surfaces in high Bingham flows subjected to inertia.

Keywords: Viscoplastic fluids, Multifield Galerkin least-squares method, Regularized Bingham model, Inertia effects, Sudden expansion flow.

SUMÁRIO

Lista de Figuras	i
Lista de Símbolos.....	iv
Capítulo 1	
Introdução.....	1
1.1 Considerações Gerais.....	1
1.2 Revisão Bibliográfica.....	10
1.3 Conteúdo da tese.....	24
Capítulo 2 Equações da Dinâmica dos Fluidos	26
2.1 Introdução	26
2.2 Cinemática	28
2.3 Conservação de Massa	30
2.4 Balanço de Momentum Linear	31
2.5 Balanço de Momentum Angular.....	33
Capítulo 3 Relações Constitutivas.....	34
3.1 Introdução	34
3.2 Fluido newtoniano	36
3.3 Comportamento não newtoniano.....	39
3.4 Fluido newtoniano generalizado.....	46
3.5 Efeitos de Diferenças de Tensões Normais e de Memória.....	54
Capítulo 4 Aproximação de Elementos Finitos	58
4.1 Introdução.....	58
4.2 Problema de Valor de Contorno	60
4.3 Formulação de Galerkin	61
4.4 Dificuldades na Formulação de Galerkin para Escoamentos Incompressíveis.....	64

4.5	Formulação de Galerkin Mínimos-Quadrados.....	67
4.6	O Problema Simulado.....	70
4.7	Estratégia de solução	73
	Capítulo 5 Resultados Numéricos	78
	Capítulo 6 Conclusões e Perspectivas	104
	Referências Bibliográficas	108

Lista de Figuras	i
Lista de Símbolos	iv
Figura 2.1. Representação gráfica de uma deformação arbitrária de um material contínuo.....	27
Figura 3.1. Experimento ideal para determinar a relação entre as tensões cisalhantes e a velocidade de deformação.....	37
Figura 3.2. Curva de escoamento para uma solução polimérica mostrando dois extremos de um completo emaranhamento e alinhamento.....	41
Figura 3.3. Curvas de escoamento de fluidos não newtonianos generalizados.....	44
Figura 3.4. Diagrama da curva do modelo <i>power law</i>	48
Figura 3.5. Curvas de escoamento para fluidos de Bingham-Papanastasiou, considerando $m=10^{-4}$ até $m=10^5$	55
Figura 3.6. Variação da viscosidade com a taxa de cisalhamento para fluidos de Bingham-Papanastasiou, considerando $m=10$ até $m=10^4$	56
Figura 4.1. Mapeamento do domínio do elemento e ordenamento local dos nós (Hughes, 1987).....	76
Figura 4.2. Funções de forma bilineares locais (N_a) e globais (N_A) (Hughes, 1987)...	77
Figura 5.1. Escoamento através de uma expansão abrupta – definição da geometria estudada.....	79
Figura 5.2. Procedimento de independencia de malha (i) domínio completo, (a) C_p ; (b) τ^*	80
Figura 5.2. Procedimento de independencia de malha (ii) detalhes, para: (c) C_p ; (d) τ^*	81
Figura 5.3. Escoamento através de uma expansão abrupta: (a) refinamento na região da expansão; (b): detalhe nas vizinhanças da expansão	82

Figura 5.4. Regiões escoadas e não escoadas, considerando $Re=0$: (a) $Bn=0.2$; (b) $Bn=2$; (c) $Bn=20$; (d) $Bn=30$; (e) $Bn=60$; (f) $Bn=100$	84
Figura 5.5. Influência do número de Herschel-Bulkley nas superfícies de escoamento para $n=1$ e $Re \approx 0$ (resultados de Jay et al., 2001)	87
Figura 5.6. Elevação da velocidade axial adimensional ao longo do canal para $Re=0$: (a) $Bn=0.2$; (b) $Bn=2$; (c) $Bn=20$;	88
Figura 5.6. Elevação da velocidade axial adimensional ao longo do canal para $Re=0$: (d) $Bn=30$; (e) $Bn=60$; (f) $Bn=100$	89
Figura 5.7. Perfis transversais de velocidade axial adimensional para $Re=0$ e $Bn=0.2-100$: (a) em $x_1^*=-10$; (b) em $x_1^*=+10$	91
Figura 5.8. Perfil longitudinal da queda de pressão adimensional através do canal para $Re=0$ e $Bn=0,2-100$	94
Figura 5.9. Elevações de pressão adimensional através do canal para $Re=0$: (a) $Bn=0.2$; (b) $Bn=2$; (c) $Bn=20$	95
Figura 5.9. Elevações de pressão adimensional através do canal para $Re=0$: (d) $Bn=30$; (e) $Bn=60$; (f) $Bn=100$	96
Figura 5.10. Regiões escoadas e não escoadas para $Bn=2$: (a) $Re=0$; (b) $Re=15$	97
Figura 5.10. Regiões escoadas e não escoadas para $Bn=2$: (c) $Re=30$; (d) $Re=45$; (e) $Re=50$	98
Figura 5.11. Perfis longitudinais de tensão extra em $x_2^*=2$, a jusante do plano de expansão, para $Bn=2$: (a) $Re=0$; (b) $Re=50$	99
Figura 5.12. Perfis longitudinais de tensão extra em $x_2^*=0$, a jusante do plano de expansão, para $Bn=2$: (a) $Re=0$; (b) $Re=50$	100
Figura 5.13. Comprimentos de recolamento versus números de Reynolds, para $Bn=0$	101

Figura 5.14. Comprimentos de recolamento versus números de Bingham, para Re=50	102
Figura 5.15. Linhas de corrente para Re=50: (a) Bn=0; (b) Bn=0,2 (c) Bn=1; (d) Bn=2; (e) Bn=3; (f) Bn=5	103

Lista de Símbolos

P	-	ponto material
$\mathbf{X}=(X_1, X_2, X_3)$	-	posição na configuração de referência
$\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$	-	posição na configuração atual
$\mathbf{x}=\chi(\mathbf{X}, t)$	-	partícula material no espaço euclidiano
\mathbf{u}	-	velocidade
Ω_t	-	região
$\partial_t = \Gamma_t$	-	fronteira
ρ	-	massa específica
B	-	corpo
M	-	massa do corpo B
\mathbf{n}	-	vetor unitário normal exterior
$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$	-	Força de corpo por unidade de massa
\mathbf{t}	-	vetor tensão
$\mathbf{T}=\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)$	-	tensor tensão
$\mathbf{r}=\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$	-	vetor posição
$\nabla \mathbf{u}$	-	gradiente de velocidade
\mathbf{D}	-	tensor taxa de deformação
\mathbf{W}	-	tensor vorticidade
\mathbf{G}	-	função tensorial
\mathbf{Q}	-	tensor ortogonal
P	-	pressão termodinâmica
μ	-	viscosidade absoluta
$\boldsymbol{\tau}$	-	tensor desviador ou viscoso
p	-	pressão hidrostática
$\dot{\gamma}$	-	taxa de cisalhamento
$\eta(\dot{\gamma})$	-	Função viscosidade

η_p	-	Viscosidade plástica
Ω	-	domínio aberto limitado
N	-	número de dimensões espaciais
Γ	-	fronteira de Ω
Γ_g	-	porção da fronteira Γ onde são impostas as condições de contorno de Dirichlet (essenciais)
Γ_h	-	porção da fronteira Γ onde são prescritas as condições de contorno de Neumann (naturais)
$\bar{\Omega}$	-	domínio fechado
Ω_h	-	partição de elementos finitos
U^h	-	aproximação de uma variável U
N_A	-	função base associado ao ponto nodal global A da discretização Ω_h
d_A	-	grau de liberdade associado ao ponto global A da discretização Ω_h
m	-	grau de interpolação dos elementos finitos
\mathbf{b}	-	força do corpo
\mathbf{g}	-	aceleração da gravidade
\mathbf{t}_h	-	força de superfície
\mathbf{S}	-	função peso do tensor extra de tensões
\mathbf{v}	-	função peso da velocidade
q	-	função peso da pressão
P	-	subespaço do campo de pressão
V	-	subespaço do campo de velocidade
Σ	-	subespaço do campo do tensor extra de tensões
h	-	comprimento característico dos elementos
P^h	-	subespaço para aproximação do campo da pressão

V^h	-	subespaço para aproximação do campo da velocidade
Σ^h	-	subespaço para aproximação do campo do tensor extra de tensões
V_g^h	-	subespaço para aproximação do campo de velocidade prescrita na fronteira Γ_g
R_k, R_l, R_m	-	espaços polinomiais de graus k, l, m em Ω_K
$C^0(\Omega)$	-	espaço de funções contínuas
$L^2(\Omega)$	-	espaço de Hilbert de funções de quadrado-integrável sobre o domínio Ω
$L^2_0(\Omega)$	-	espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio Ω
$H^1_0(\Omega)$	-	espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre Ω que se tornam zero em Γ_g
$H^1(\Omega)$	-	subespaço do campo do tensor extra de tensões
β	-	Parâmetro de estabilidade (Behr et al., 1993)
$\alpha(\text{Re}_K)$	-	Parâmetro de estabilidade (Franca e Frey, 1992)
δ	-	Parâmetro de estabilidade (Franca e Frey, 1992)
m_K	-	Parâmetro proveniente da análise de erro (Franca e Frey, 1992)
$ \mathbf{u} _p$	-	Norma p do \mathbb{R}^N
\mathbf{H}	-	Matriz que representa o acoplamento entre $\boldsymbol{\tau}$ e \mathbf{u}
$[\mathbf{E}]$	-	matriz relacionada ao tensor extra de tensões $\boldsymbol{\tau}$

$[\mathbf{N}]$	-	Matriz do termo advectivo
$[\mathbf{K}]$	-	Matriz do termo difusivo
$[\mathbf{G}]$	-	Matriz do termo de pressão
$[\mathbf{G}^T]$	-	Matriz do termo da equação de continuidade
$[\mathbf{F}]$	-	Matriz do termo de forças viscosas
$[\mathbf{E}_\alpha]$	-	Matriz relacionada ao tensor extra de tensões $\boldsymbol{\tau}$ proveniente dos termos de mínimos quadrados
$[\mathbf{N}_\alpha]$	-	Matriz do termo advectivo proveniente dos termos de mínimos quadrados
$[\mathbf{F}_\alpha]$	-	Matriz do termo de forças viscosas proveniente dos termos de mínimos quadrados
$[\mathbf{G}_\alpha]$	-	Matriz do termo de pressão proveniente dos termos de mínimos quadrados
$[\mathbf{M}]$	-	Matriz do termo δ
$[\mathbf{P}]$	-	Matriz do termo ϵ
Q_1	-	Elementos finitos de tipo quadrangular bilinear
$\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)^T$	-	Coordenadas locais de um ponto no quadrado bi-unitário
N_a	-	Funções de forma bilineares locais
N_A	-	Funções de forma bilineares globais

Capítulo 1

Introdução

1.1. Considerações Gerais

Fluidos com comportamento newtoniano representam mais de 90% dos fluidos presentes na biosfera, com relevante presença na indústria e no dia a dia da maioria das pessoas. Entretanto um comportamento não newtoniano é observado na maioria dos fluidos sintéticos industriais bem como em fluidos com relevância biológica indiscutível, como o sangue, só para citar alguns casos. A denominação de fluido não newtoniano é normalmente empregada para materiais cujo comportamento se enquadre entre dois extremos clássicos – fluidos newtonianos viscosos e sólidos hookeanos elásticos – e que possam ser classificados como fluidos, embora esta definição não seja válida para todos os tipos de comportamento não newtoniano.

Exemplos de fluidos não newtonianos são: petróleo bruto, fluidos lubrificantes utilizados na perfuração de poços de petróleo e gás natural, lamas provenientes da indústria extrativa, tintas, produtos cosméticos, colas, sabões, detergentes, medicamentos, alimentos na fase líquida ou que passaram pela fase líquida durante sua preparação.

A Mecânica dos Fluidos é o estudo do comportamento dos materiais fluidos quando em escoamento. A análise dos fenômenos da Mecânica dos Fluidos se baseia na solução simultânea de certo número de equações representando as leis físicas que governam os fenômenos considerados. Estas equações podem ser agrupadas em duas categorias. A primeira, inclui as equações que representam leis físicas válidas, em princípio, para todos os materiais mecânicos. Estas equações incluem as equações de balanço a conservação de massa, os balanços de momentum linear e angular e a conservação de energia, além de uma desigualdade, expressa pela segunda lei da Termodinâmica.

Um segundo grupo de equações representa leis físicas que governam o comportamento de materiais específicos. Segundo Astarita e Marucci (1974), a forma dessas equações depende da classe dos materiais considerados e do valor de seus parâmetros. Estas equações, conhecidas como equações constitutivas, caracterizam as propriedades físicas do meio contínuo estudado, estabelecendo uma relação matemática entre as variáveis que permite descrever o comportamento de um material sujeito à ação de forças. No caso de fluidos, as componentes do tensor desviador ou viscoso estão associadas à dissipação de energia.

Existem, basicamente, três diferentes formas de abordagem de problemas em mecânica dos fluidos e transferência de calor: experimental, teórica (ou analítica) e numérica (ou computacional). Na maioria dos problemas de Engenharia estas três

abordagens podem ser convenientemente combinadas. Por exemplo, na simulação numérica de escoamentos turbulentos são, em geral, utilizados alguns parâmetros obtidos experimentalmente. Além disso, muitas técnicas teóricas que utilizam cálculos computacionais podem ser classificadas como abordagens numéricas. A *Dinâmica dos Fluidos Computacional* (CFD) – que pode ser descrita de forma generalizada como a simulação numérica de processos físicos e/ou físico-químicos que apresentam escoamento, tratando problemas de mecânica dos fluidos e de transferência de calor – vem sendo cada vez mais aplicada na últimas décadas, principalmente devido ao aumento da disponibilidade de recursos computacionais e da velocidade de processamento, possibilitando tratar de forma realista problemas com grande complexidade e prever o desempenho de novos projetos ou processos.

A modelagem de fenômenos de interesse em Engenharia, como o estudo de *Dinâmica dos Fluidos*, usualmente origina equações diferenciais ou integrais. Estas equações – exceto no caso de problemas mais simples, que permitem soluções analíticas – são tratadas computacionalmente através de métodos numéricos, essencialmente técnicas que permitem encontrar soluções aproximadas para elas. O método de Elementos Finitos, amplamente utilizado na simulação de equações diferenciais e integrais provenientes de modelagens de fenômenos de Engenharia, foi introduzido nos anos 50 e no início dos anos 60 para a solução numérica de equações diferenciais parciais descrevendo problemas de Mecânica dos Sólidos. Essencialmente, o método era visto como uma generalização dos métodos anteriormente aplicados em cálculo estrutural para tratar vigas, pórticos e placas, nos quais as estruturas eram subdivididas em pequenas partes – os elementos finitos – com comportamento previamente conhecido (Johnson, 1987). Em 1980, Patankar observou que, enquanto a metodologia de diferenças finitas já estava bem consolidada

na área de *Dinâmica dos Fluidos Computacional*, o método de elementos finitos apresentava um desenvolvimento mais lento, se comparado às diferenças finitas ou ao seu próprio sucesso na área de Mecânica dos Sólidos. A partir de meados da década de 60, teve início o estudo da análise matemática do método de elementos finitos, fazendo com que ele se convertesse num método geral de solução numérica de equações diferenciais parciais e equações integrais, aplicado em quase todos os campos de Engenharia e Ciências Aplicadas. Como exemplos de aplicações podem ser citados problemas de engenharia de estruturas, resistência de materiais, mecânica dos fluidos, engenharia nuclear, electromagnetismo, propagação de ondas, condução de calor, processos de convecção-difusão e engenharia de petróleo.

O método de elementos finitos é hoje uma das técnicas mais empregadas na solução numérica de equações diferenciais parciais. Segundo Oden (1991) “talvez nenhuma outra família de métodos de aproximação tenha tido tanto impacto na teoria e aplicação de métodos numéricos ao longo do século XX”. Esta metodologia utiliza uma formulação variacional equivalente, em vez de operar diretamente sobre sistemas de equações diferenciais – como o método das diferenças finitas, na qual o problema discreto é obtido substituindo-se as derivadas por quocientes de diferenças, envolvendo os valores das incógnitas num número finito de pontos. O processo de discretização via elementos finitos reformula o problema de valor inicial e / ou de valor de contorno na forma diferencial como um problema variacional equivalente, sendo a solução aproximada obtida através da integração de uma quantidade em um domínio. A integral de uma função sobre um domínio arbitrário é transformada num somatório de integrais sobre um conjunto arbitrário de subdomínios – os elementos finitos. Se estes subdomínios forem suficientemente pequenos, funções polinomiais podem representar adequadamente o comportamento local da solução.

Essencialmente, a aproximação via metodologia de elementos finitos de uma equação diferencial ou integral é iniciada através da formulação variacional do problema em questão. Em seguida, efetua-se uma discretização – com a construção de um subespaço de dimensão finita, normalmente um subconjunto do espaço que denota o conjunto de funções (candidatas a solução) admissíveis – que costuma ter dimensão infinita. O próximo passo é a solução do problema discreto, seguido da programação propriamente dita – a implementação computacional do método.

Como vantagens do método de elementos finitos podem ser citadas (Johnson, 1987; Oden, 1991) a capacidade de tratar geometrias arbitrárias e condições de contorno gerais, uma vez que o método é, essencialmente, independente da geometria, podendo ser aplicado a domínios complexos, sujeitos a condições de contorno arbitrárias. Esta vantagem, além da capacidade de lidar com materiais com propriedades variáveis ou com não linearidades, é particularmente importante quando esta metodologia é comparada a diferenças finitas. Outra importante característica é permitir a utilização de malhas não estruturadas, uma vez que a aplicação do método não requer, necessariamente, uma transformação global das coordenadas, podendo-se adicionar ou suprimir elementos sem alterar a estrutura de dados global. Além disso, a metodologia de elementos finitos, devido a sua estrutura clara e a sua versatilidade, possibilita uma programação flexível, levando à construção de códigos computacionais sistemáticos de aplicação generalizada. (Existem diversos códigos computacionais disponíveis, com amplo espectro de aplicações, muitos deles de uso comercial.) Para finalizar, é importante citar a fundamentação matemática do método de elementos finitos, principalmente devido ao intenso desenvolvimento da análise matemática alcançado a partir dos anos 80. O sólido embasamento matemático do método de elementos finitos adiciona a ele confiabilidade, possibilitando, em muitos

casos, uma análise matemática com estimativa da precisão das aproximações obtidas através de sua aplicação.

A metodologia de elementos finitos mais empregada é o conhecido método de Galerkin (Ciarlet, 1978), inicialmente introduzido para aproximar a solução de equações diferenciais parciais em cálculo de estruturas elásticas lineares, cuja modelagem via elementos finitos normalmente origina operadores elípticos simétricos. Esta metodologia nem sempre é a mais adequada para tratar problemas de fluidos. Uma das razões é a presença dos termos convectivos – inerentemente assimétricos. A aplicação do método de Galerkin a problemas com operadores assimétricos, como os problemas de mecânica dos fluidos, não obteve o mesmo grau de sucesso atingido para operadores simétricos, típicos de problemas de mecânica dos sólidos. Problemas, como a presença ocasional de oscilações espúrias no campo de velocidades, tiveram que ser enfrentados para desenvolver metodologias de elementos finitos capazes de simular adequadamente escoamentos de fluidos. Finalmente, outro problema, não menos importante, que surge na aproximação numérica destes escoamentos é a coercividade, necessária para assegurar existência e unicidade da solução da formulação fraca (Hughes, 1987).

A aplicação do método de Galerkin nas aproximações numéricas de escoamentos incompressíveis apresenta algumas dificuldades (Johnson, 1987). Inicialmente, tem-se a necessidade de compatibilizar os subespaços de elementos finitos de velocidade e de pressão, satisfazendo a clássica condição de Babuška-Brezzi (Babuška, 1973; Brezzi, 1974) – uma vez que o campo de pressões deve ser computado como um multiplicador de Lagrange associado à restrição de incompressibilidade do campo de velocidades, gerando um problema misto em velocidade e pressão. Em outras palavras, a condição de Babuška-Brezzi não permite

que os subespaços de elementos finitos de velocidade e de pressão sejam gerados por combinações arbitrárias de interpolações de elementos finitos. Esta condição restringe a escolha de elementos finitos, descartando combinações desejáveis como elementos de igual ordem. Outra dificuldade surge no caso de formulações multicampos: a escolha dos subespaços de elementos finitos de tensão e de velocidade. A terceira dificuldade seria a instabilidade inerente aos esquemas de discretização centrados – obtidos tanto através da formulação de Galerkin como via diferenças finitas – na abordagem de problemas advectivo dominados, devido à assimetria do operador advectivo (Brooks e Hughes, 1982; Patankar, 1980). Esta instabilidade, que provoca um comportamento oscilatório da discretização via método de Galerkin, pode surgir sempre que os efeitos de inércia forem levados em conta, podendo ser agravada pelas não linearidades presentes nos modelos constitutivos de fluidos newtonianos generalizados.

Os métodos estabilizados de elementos finitos são construídos adicionando-se termos dependentes da malha aos termos da aproximação clássica de Galerkin – que são funções dos resíduos das equações de Euler-Lagrange, avaliados a cada elemento. Além disso, os termos de estabilização são consistentes (pois os referidos resíduos são satisfeitos pelas soluções exatas) e são numericamente estabilizadores, não necessitando satisfazer a condição de Babuška-Brezzi (Ciarlet, 1978). A primeira metodologia estabilizada proposta foi o método SUPG “*Streamline Upwind Petrov-Galerkin*” (Brooks e Hughes, 1982), usado inicialmente para tratar o problema de advecção-difusão e, posteriormente, estendido a outras aplicações. Uma outra metodologia estabilizada será empregada neste trabalho: o método de Galerkin/mínimos-quadrados (GLS), proposto por Hughes et al. (1986) para tratar o problema de Stokes, que utiliza uma formulação de mínimos quadrados dos resíduos

da formulação de Galerkin para construir os termos de adicionais (de perturbação). Desta forma, ele aumenta a estabilidade da formulação original de Galerkin, sem prejudicar sua consistência. Este método já foi amplamente empregado para tratar problemas estruturais e de escoamentos de fluidos (Franca e Frey, 1992; Franca et al., 1994). O método GLS estabiliza o operador advectivo da equação de movimento, adicionando um efeito “*upwind*” na direção das linhas de corrente do escoamento (Brooks e Hughes, 1982; Franca et al., 1992), além de modificar a formulação clássica de Galerkin, não mais requerendo a satisfação a priori da condição de Babuška-Brezzi (Hughes et al., 1986).

O objetivo deste trabalho é empregar uma metodologia de elementos finitos multicampos, estabilizado por uma formulação de Galerkin/mínimos-quadrados (Hughes et al., 1986), denotada por GLS, para simular escoamentos de fluidos de Bingham regularizados pela estratégia proposta por Papanastasiou (1987). A metodologia GLS modifica a formulação clássica de Galerkin, sem requerer a satisfação de condições de compatibilidade envolvendo os subespaços de elementos finitos para os pares pressão-velocidade e tensão-velocidade. O método permanece estável mesmo na aproximação de escoamentos advectivo-dominados, devido à construção adequada dos parâmetros de estabilidade dos termos de mínimos quadrados das equações de equilíbrio para o problema de escoamento do fluido (Franca et al., 1992), além de se manter estável e preciso para escoamentos sujeitos a altos números de Bingham e de Reynolds.

A simulação numérica considera uma expansão planar abrupta 1:4, que, apesar de ser um problema clássico (“benchmark”) apresenta poucos resultados na literatura para o caso de fluidos de Bingham-Papanastasiou. As influências da tensão de escoamento e da inércia na morfologia das regiões materiais escoadas e não escoadas

são consideradas através da variação do número Bingham de 0,2 até 100 e do número de Reynolds de 0 até 50. Os resultados numéricos comprovaram a boa estabilidade da formulação empregada e estão de acordo com a literatura.

1.2. Revisão Bibliográfica

Materiais viscoplásticos são caracterizados por uma tensão limite de escoamento, a partir da qual o material se comporta como um líquido viscoso. Bird et al. (1982) apresentam uma revisão abrangente acerca do comportamento destes fluidos, incluindo os modelos de Bingham (para o qual são apresentadas algumas soluções analíticas), Herschel-Bulkley e Casson. O estado da arte para fluidos viscoplásticos é discutido por Barnes (1999), numa extensa revisão bibliográfica cobrindo todo o século 20, que mostra a importância do estudo do comportamento de materiais viscoplásticos – sólidos, sólidos macios e líquidos estruturados – em problemas de interesse. Neste trabalho, Barnes (1999) enfatiza a importância da definição adequada da tensão de escoamento, um tema ainda controverso. Usualmente a tensão de escoamento de um sólido era definida como o ponto a partir do qual qualquer aumento na tensão aplicada iniciaria no sólido deformado um comportamento caracterizado por deformação permanente. Já a tensão de escoamento de um líquido estruturado era normalmente considerada como o ponto a partir do qual qualquer diminuição introduzida na tensão aplicada faria com que o líquido deformado começasse a apresentar um comportamento de sólido, i.e., ausência de deformação contínua no material. O desenvolvimento das técnicas experimentais mostrou que, embora exista uma pequena faixa de tensões na qual as propriedades mecânicas mudam drasticamente (uma tensão de escoamento aparente), estes materiais mostram uma deformação lenta, mas contínua e permanente, quando solicitados por um longo tempo abaixo deste nível, após ter apresentado uma resposta inicial elástica e linear à tensão aplicada. A resposta de líquidos estruturados passa de um comportamento característico de fluência para as tensões mais baixas, quando as

tensões aumentam, apresenta uma dependência do tipo *power-law* e, geralmente, tem comportamento newtoniano para as tensões mais elevadas – passando por uma transição de uma viscosidade muito alta ($>10^6 Pa.s$) para um comportamento clássico de líquido ($<0,1 Pa.s$) – para uma variação relativamente pequena de tensões. Apesar de mostrar que a tensão de escoamento não pode ser considerada uma propriedade física do material – abaixo da qual não poderia haver escoamento – Barnes (1999) sugere que seja considerada uma tensão de escoamento aparente, válida para aplicações de Engenharia.

Materiais viscoplásticos são descritos por modelos descritos por duas equações com derivadas descontínuas, inconvenientes para aproximações numéricas, uma vez que exigem o rastreamento da superfície de escoamento (a superfície que separa as regiões escoadas, que apresentam comportamento típico de fluido, daquelas ditas não escoadas – ou plásticas, nas quais ou não existe movimento ou existe movimento de corpo rígido). Por isso, existem poucas soluções exatas para escoamentos de fluidos de Bingham, por exemplo, para os casos de escoamento retilíneo e de escoamento circular de Couette (Lipscomb e Denn, 1984). Segundo Frigaard e Nouar (2005), modelos de regularização para a viscosidade são os métodos mais utilizados para tratar numericamente escoamentos de fluidos viscoplásticos. A regularização consiste em substituir o modelo que emprega duas equações por uma única equação, válida para todo o domínio material, que, matematicamente, consiste em suavizar um problema não diferenciável. De um ponto de vista físico, a viscosidade regularizada tende para um valor grande – porém finito – quando a taxa de deformação se anula. Frigaard e Nouar (2005) analisaram a convergência de três metodologias de regularização da viscosidade em escoamentos de fluidos viscoplásticos de Bingham, em relação aos modelos exatos correspondentes. A primeira metodologia (Allouche et

al., 2000) emprega uma equação algebricamente bastante simples e as outras duas regularizações para viscosidade são amplamente usadas na literatura, e foram propostas por Bercovier e Engelman (1980) e por Papanastasiou (1987). Uma outra opção para descrever escoamentos de fluidos viscoplásticos é empregar um modelo de bi-viscosidade, que foi utilizado por diversos autores (Lipscomb e Denn (1984); O'Donovan e Tanner, 1984; Beverly e Tanner, 1992, Wilson e Taylor, 1996 e Jay et al, 2001). Esta abordagem prevê adequadamente os campos de tensão na região dita escoada, mas sua implementação é mais difícil que a dos modelos com equações de regularização e eles não são tão eficientes na previsão das superfícies de escoamento (que separam as regiões materiais escoadas e não escoadas.)

Souza Mendes et al. (1996), também usaram um modelo de bi-viscosidade para analisar o escoamento permanente de um fluido de Bingham através de um arranjo de tubos capilares, tanto via método de volumes finitos (Patankar, 1980) como experimentalmente, e determinaram uma relação entre taxa de escoamento e queda de pressão, obtendo boa concordância entre resultados numéricos e experimentais. Um modelo de bi-viscosidade, modificado para a função viscosidade, foi empregado por Souza Mendes et al. (2000), na análise de um escoamento laminar em regime permanente de fluidos newtonianos generalizados através de geometria axisimétrica composta por uma expansão e uma contração abrupta, obtendo boa concordância o modelo de Herschel-Bulkley. Mais uma vez, Souza Mendes et al. (2000) observaram boa compatibilidade entre os resultados experimentais e numéricos (via volumes finitos), exceto no caso de expansões curtas.

Liu et al. (2002) simularam via elementos finitos escoamentos lentos de fluidos de Bingham em torno de uma esfera rígida, comparando duas abordagens para regularizar o modelo de Bingham – propostas por Papanastasiou (1987) e por

Bercouvier e Engelman (1980), utilizadas respectivamente por Beris et al. (1985) e Blackery e Mitsoulis (1997), obtendo concordância com ambos modelos de regularização – o que permitiu determinar as superfícies de escoamento e obter uma solução limite para escoamentos lentos de fluidos de Bingham em torno de uma esfera. Liu et al. (2002) observaram que os dois modelos regularizadores não apresentavam diferenças significativas na convergência nem na localização ou na forma das superfícies de escoamento.

Com o objetivo de representar de forma realista o comportamento dos líquidos viscoplásticos, Souza Mendes e Dutra (2004) propuseram uma equação constitutiva para a função viscosidade para fluidos viscoplásticos fortemente pseudoplásticos, empregando apenas parâmetros reológicos. A equação foi ajustada para soluções aquosas de carbopol, para um fluido de perfuração e outros fluidos de interesse. A função proposta é contínua, apresentando um platô a baixas tensões de cisalhamento, seguido por uma queda brusca da viscosidade para uma tensão cisalhante limite – a tensão de escoamento – por sua vez seguido por uma região *power-law*. Como a função viscosidade proposta por Souza Mendes e Dutra (2004) é contínua e apresenta derivadas também contínuas, ela é conveniente para simulações numéricas. Este modelo foi posteriormente utilizado por Souza Mendes et al. (2007a) para estudar o escoamento interno de líquidos viscoplásticos através de dutos cuja geometria consiste em uma expansão abrupta axisimétrica seguida por uma contração abrupta. Neste trabalho, Souza Mendes et al. (2007a) definiram um parâmetro material reológico adimensional (o número de salto J – uma medida relativa do salto na taxa de cisalhamento quando a tensão de cisalhamento é aproximadamente igual à tensão de escoamento). Souza Mendes (2007) apresentou um procedimento alternativo para a adimensionalização de problemas de mecânica dos fluidos não newtonianos, baseado

em parâmetros reológicos apenas, cujos valores independem da vazão, para fluidos pseudoplásticos, viscoplásticos, viscoelásticos e elastoviscoplásticos. O modelo de Souza Mendes e Dutra (2004) foi também usado por Souza Mendes et al. (2007b) para investigar o deslocamento de líquidos viscoplásticos em tubos capilares provocado por injeção de gás.

Graças à sua fácil implementação computacional, a regularização de Papanastasiou (1987) é largamente utilizada em simulações numéricas de escoamentos de fluidos viscoplásticos, apesar da desvantagem de depender de um parâmetro não-reológico (numérico), que controla o crescimento exponencial do termo de tensão de escoamento do modelo clássico de Bingham em regiões sujeitas a taxas de deformação muito pequenas.

Abdali et al. (1992) simularam, por uma metodologia de elementos finitos, escoamentos de fluidos de Bingham, regularizados pela equação de Papanastasiou (1987) – que serão denotados por escoamentos de Bingham-Papanastasiou ao longo deste trabalho – através de uma contração abrupta 4:1 em canais axissimétricos e planares. Os autores também levaram em conta efeitos de entrada e de saída, buscando estudar o efeito das superfícies de escoamento nos processos de extrusão.

Alexandrou et al. (2001) estudaram a influência relativa da inércia, da viscosidade e da tensão de escoamento no processo de enchimento de uma cavidade por fluidos de Bingham- Papanastasiou, variando as condições de escoamento e as constantes reológicas. Os resultados obtidos através de um código comercial foram capazes de identificar cinco diferentes regimes de escoamento, em função dos números de Reynolds e de Bingham. Os autores enfatizaram a importância da determinação das regiões escoadas e não escoadas – separadas pela superfície de escoamento – em problemas práticos de moldagem por injeção, não apenas devido à

natureza do escoamento, como também por sua influência nas propriedades do produto final.

Peric e Slijpcevic (2001) utilizaram uma metodologia de Galerkin / mínimos-quadrados (GLS) de elementos finitos em dois campos para estudar o comportamento evolutivo de fluidos de Bingham-Papanastasiou através de uma contração planar abrupta 3:1, concluindo que a metodologia GLS é capaz de tratar adequadamente escoamentos de fluidos viscoplásticos com relevância industrial, como aqueles empregados nos processos de extrusão. Uma formulação GLS mista de elementos finitos foi também utilizada por Zinani e Frey (2007) para aproximar escoamentos lentos de fluidos de Bingham-Papanastasiou através de contrações abruptas 2:1, com geometrias planar e axisimétrica, permitindo concluir que o aumento do número de Bingham leva a um aumento significativo da queda de pressão, devido ao crescimento das regiões materiais não escoadas através do canal com expansão. A morfologia das zonas escoadas e não escoadas apresentada por Zinani e Frey (2007) concordou com os resultados anteriores de Mitsoulis e Huigol (2004).

Uma revisão das diferentes instabilidades no processo de extrusão e das condições para que elas ocorram é apresentada por Denn (1990), Larson (1992) e Jay et al. (1998a, 1998b). Segundo Jay et al. (1998a), em polímeros com alto peso molecular pode-se observar um deslizamento macroscópico na extrusão, que pode ser utilizado na redução de trincas e do inchamento dos polímeros. Jay et al. (1998b) simularam numericamente (através de um código comercial) a extrusão de um fluido não newtoniano puramente viscoso, utilizando uma lei obtida experimentalmente para o deslizamento fortemente não linear, baseada na dinâmica das cadeias moleculares e observaram que o escoamento apresenta uma tensão crítica, abaixo da qual ocorre adesão às paredes. Esta lei de fricção foi empregada por Piau et al. (1998a) para

estudar um escoamento de Poiseuille um fluido não newtoniano puramente viscoso, analisando a transição da adesão às paredes para o deslizamento.

Escoamentos de fluidos de Bingham-Papanastasiou também foram considerados por Dimakopolous e Tsamopolous (2003), no estudo do efeito da tensão de escoamento, da inércia e da pressão aplicada no gás – em tubos retos e sujeitos a restrições abruptas e em problemas de deslocamentos de líquidos causados pela injeção de gás. Este último problema foi também analisado por Sousa et al. (2007), que investigaram o deslocamento num tubo capilar, estudando os padrões de escoamento, as configurações da interface entre líquido e gás e a fração de massa de líquido depositada, em função de um número de capilaridade para fluidos não newtonianos e de uma tensão de escoamento adimensionalizada, equivalente ao número de Bingham. Sousa et al. (2007) também consideraram fluidos pseudoplásticos em seu estudo e verificaram que a fração de massa depositada nas paredes decresce e a forma das interfaces torna-se mais achatada à medida que o comportamento do fluido se afasta do comportamento newtoniano.

Mitsoulis e Huilgol (2004) estudaram, via método de elementos finitos, o escoamento de fluidos de Bingham-Papanastasiou, em expansões abruptas 2:1, levando em conta efeitos de entrada e determinando a forma e a extensão das superfícies de escoamento e a forma, o tamanho e a intensidade dos vórtices, para uma ampla faixa de números de Bingham e de Reynolds, observando uma redução no tamanho dos vórtices com o aumento do número de Bingham, independente do número de Reynolds. Os autores também determinaram a perda de carga localizada na expansão, obtendo valores para a correção de pressões. Huilgol e You (2005) resolveram, empregando princípios e desigualdades variacionais e o método da lagrangiano aumentado – desenvolvido por Fortin e Glowinski (Glowinski, 1984;

Fortin e Glowinski, 1983) – escoamentos de fluidos de Bingham, Casson e Herschel-Bulkley em tubulações de seção circular e quadrada, comparando as velocidades dos escoamentos pistonados, as vazões e os fatores de atrito para estes fluidos. Posteriormente, Huilgol (2006) desenvolveu um processo sistemático para determinar a queda de pressão mínima requerida para iniciar o escoamento de fluidos viscoplásticos em dutos com várias formas de seção transversal simétrica. O processo, baseado em lemas desenvolvidos para fluidos de Bingham, é aplicável a outros fluidos com tensão de escoamento, como os fluidos de Casson e Herschel-Bulkley.

Escoamentos de fluidos viscoplásticos em diferentes geometrias foram simulados numericamente por diversos autores. Hammad e Vradis (1996) analisaram, via diferenças finitas, o escoamento lento, incompressível e em regime permanente, de um fluido de Bingham através de uma contração abrupta axisimétrica, levando em conta o efeito da dissipação viscosa. Os autores estudaram o efeito do aquecimento do fluido, gerado pela dissipação viscosa, na alteração da tensão de escoamento e o efeito do número de Péclet no campo de temperaturas ao longo do escoamento. Hammad (2000) analisou, via diferenças finitas, o efeito das condições hidrodinâmicas em um escoamento viscoplástico laminar não isotérmico no comportamento de um fluido de Bingham escoando numa expansão abrupta com uma obstrução variável antes do plano da expansão. O autor observou que este problema de escoamento viscoplástico com transferência de calor associada numa geometria complexa apresentava características diferentes do caso de escoamentos de fluidos newtonianos. Outros experimentos com fluidos de Bingham e Herschel-Bulkley foram realizados por Vradis e Otugen (1997) e Hammad et al. (2001), com o objetivo de avaliar os efeitos da tensão de escoamento sobre grandezas cinemáticas como o perfil de velocidade e o comprimento da recirculação.

Um interessante trabalho experimental foi realizado por Roberts et al. (2001) que, empregando dados obtidos em reômetros controlados pela tensão, apresentaram curvas de escoamento (viscosidade versus tensão cisalhante) para líquidos viscoplásticos de interesse comercial exibindo comportamento fortemente pseudoplástico – viscosidade variando acentuadamente com a tensão cisalhante, considerando três diferentes modelos: o modelo de Cross a três parâmetros, o modelo de Ellis padrão (a quatro parâmetros) e, finalmente, um modelo composto de Ellis – a oito parâmetros.

Neofytou (2005) comparou quatro modelos não newtonianos diferentes: *power-law*, Quemada, Bingham e Casson, aplicados ao clássico problema da cavidade. O autor investigou os efeitos não newtonianos, para os diferentes modelos considerados considerando as características pseudoplásticas e dilatantes dos fluidos. Para evitar difusão artificial, foi empregado um esquema numérico de volumes finitos combinado a um esquema SIMPLE, com correção de pressões e um esquema QUICK para a diferenciação dos termos advectivos, com precisão de ordem 3.

Trabalhos recentes utilizando o modelo de Bingham justificam a importância de seu estudo. Pode-se citar uma aplicação a problemas práticos da indústria, como, por exemplo, a medição das dimensões de cavidades próximas de um impulsor, resultantes do processo de agitação em um tanque de *ketchup*, relevante para o projeto de agitadores (Wilkens et. al, 2005). Outra aplicação importante é na lubrificação de mancais hidrodinâmicos. Segundo Gertzos et al. (2008) o modelo de Bingham descreve adequadamente uma classe de fluidos inteligentes, como eletro-reológicos e magneto-reológicos, que podem ser utilizados como fluidos para lubrificação de mancais. Empregando um código comercial para analisar os parâmetros de

desempenho de mancais hidrodinâmicos, Gertzos et al. (2008) desenvolveram diagramas – de fácil utilização em projetos de mancais.

O modelo de Bingham também foi empregado em reômetros de Couette (dois cilindros co-axiais rotativos com escoamento de fluido de Bingham – o fluido cisalhado – no *annulus* entre eles) por Estellé et al. (2008), que concluíram que a aproximação de Bingham é capaz de prever adequadamente a taxa de cisalhamento, permitindo a obtenção de curvas de escoamento, para escoamentos completamente cisalhados. Outra aplicação relevante é o estudo da estabilidade do escoamento de Couette entre dois cilindros concêntricos não axissimétricos realizada por Catton (2006) para os modelos *power-law* e de Bingham, verificando que as regularizações empregadas no modelo de Bingham dependem fracamente da equação reológica escolhida e que a instabilidade no caso de fluidos de Bingham está presente para tensões superiores à tensão de escoamento.

Singh e Denn (2008) simulam, via método de elementos finitos, o movimento de bolhas e gotas em um fluido de Bingham, regularizado pela equação de Bercovier e Engelman (1980), visando explicar o efeito de múltiplas bolhas e múltiplas gotas no movimento. Os autores observaram que bolhas e gotas agrupadas requerem forças de corpo menores para se movimentarem que uma única bolha ou gota, sendo este comportamento verificado tanto para o movimento de bolhas e gotas em um fluido de Bingham como para seu movimento em um fluido newtoniano. Roquet e Saramito (2008) empregaram uma metodologia de elementos finitos mista, anisotrópica e auto adaptativa, para simular um escoamento de Pouseuille de um fluido de Bingham, considerando condições de contorno de deslizamento na parede, para um duto com seção quadrada, identificando diferentes regimes de escoamento.

Objetivando modelar o problema de extrusão, Mitsoulis (2007) simulou, via elementos finitos, um *benchmark* clássico: um “*annular extrudate swell*” num duto usando o modelo de Herschel-Bulkley, regularizado por Papanastasiou (1987), que pode ser reduzido, com escolhas de parâmetros apropriados, aos modelos de Bingham, *power-law* e newtoniano. Os resultados apresentam a forma da extrusão, e, em particular, a espessura e o diâmetro do inchamento do extrudado em função de um índice adimensional *power law* (no caso de pseudoplasticidade) e de uma tensão de escoamento adimensional (no caso de fluido de Bingham). Para o modelo viscoplástico de Bingham, a espessura do extrudado diminui, tendendo a zero à medida que aumenta a viscoplasticidade (ou seja $Bn \rightarrow \infty$).

Aproximações numéricas de escoamentos incompressíveis através do método de Galerkin clássico em três campos – que usam como variáveis primais velocidade, pressão e tensão – enfrentam três importantes dificuldades. A primeira, causada pela restrição de incompressibilidade, que gera um problema misto em velocidade e pressão, seria a necessidade de compatibilização dos subespaços de aproximação de velocidade e pressão, que deveriam satisfazer a chamada condição matemática de Babuška-Brezzi (Babuška, 1973; Brezzi, 1974). Esta condição não permite combinações arbitrárias de funções de interpolação para velocidade e pressão, impedindo a aproximação conveniente dos dois campos por elementos finitos de igual ordem. A segunda seria a instabilidade na aproximação de escoamentos advectivo-dominados, que gera oscilações espúrias nos campos das variáveis estudadas. Esta instabilidade é inerente aos esquemas de discretização centrais, que tanto podem ser efetuados através da formulação de Galerkin quanto através de esquemas de diferenças finitas (Brooks e Hughes, 1982; Hughes e Brooks, 1982; Patankar, 1980). Finalmente, a terceira dificuldade surge no caso de um problema em três campos, no

qual devem ser satisfeitas condições de compatibilidade tanto entre as funções de base de velocidade e pressão (a condição de Babuška-Brezzi) quanto entre as funções de base de velocidade e tensão.

Estas dificuldades podem ser contornadas de duas formas: pode-se empregar o método de Galerkin clássico combinado a funções de interpolação de elementos finitos complexas ou manter funções de interpolação simples e modificar a formulação de Galerkin, utilizando as chamadas metodologias estabilizadas, que consistem, em geral, na adição de termos dependentes da malha à formulação usual de Galerkin, visando estabilizar a formulação e compatibilizar os subespaços funcionais das variáveis. Como estes termos são funções dos resíduos das equações de Euler-Lagrange, avaliadas a cada elemento, a consistência do problema fica preservada, uma vez que suas soluções exatas satisfazem estes resíduos. Desta forma, as metodologias estabilizadas aumentam a estabilidade do método de Galerkin clássico, sem prejudicar sua consistência.

O desenvolvimento de métodos estabilizados foi iniciado com a introdução do método SUPG: “*Streamline-upwind/Petrov-Galerkin*” (Brooks e Hughes, 1982; Hughes e Brooks, 1982), que consiste em adicionar às funções do método de Galerkin clássico uma perturbação atuando apenas na direção das linhas de corrente do escoamento (“*streamline upwind*”). Assim, a formulação SUPG não necessita satisfazer a condição de compatibilidade de Babuška-Brezzi para ser estável. A convergência da metodologia SUPG foi posteriormente estudada por Johnson et al. (1984). Segundo Franca et al. (2003), a introdução de metodologias estabilizadas de elementos finitos e sua posterior generalização foi uma das maiores contribuições científicas devidas a Hughes.

Dentre as extensões do método SUPG, destaca-se o método Galerkin / mínimos-quadrados (GLS), introduzido por Hughes et al. (1986), conforme já mencionado, no contexto do problema de Stokes, que vem sendo aplicado com sucesso a problemas estruturais e de fluidos. Posteriormente, o problema de Navier-Stokes foi simulado via metodologia GLS por Franca e Frey (1992). Esta metodologia consiste na adição, ao método de Galerkin clássico, de termos de perturbação dependentes da malha, que, analogamente aos termos do método SUPG, são construídos a partir de uma minimização (via método de mínimos quadrados) dos resíduos das equações de Euler-Lagrange do problema, de forma a aumentar a estabilidade da formulação de Galerkin original sem prejudicar sua consistência, já que a solução exata do problema satisfaz os resíduos da equação de Euler-Lagrange. Estes métodos são construídos de modo a não necessitarem satisfazer *a priori* a condição de Babuška-Brezzi, permitindo, assim, empregar combinações de elementos finitos de mesma ordem para a aproximação dos subespaços de velocidade e pressão nos problemas mistos. Além disso, estes novos métodos estabilizam os operadores advectivos na direção das linhas-de-corrente dos escoamentos, sendo capazes de captar precisamente recirculações de fluido, esteiras de vórtices e camadas limite severas.

É importante enfatizar que a metodologia GLS, além de simular adequadamente escoamentos advectivo-dominados, permite contornar a necessidade de compatibilização entre as funções de base de velocidade, pressão e tensão. Segundo Coronado et al. (2006) a metodologia GLS é interessante para aplicação em computação em larga escala, por gerar sistemas lineares que podem ser resolvidos por esquemas iterativos e por permitir combinações simples de funções de interpolação, que podem ser implementadas de forma conveniente e eficiente em modernos “clusters” com distribuição de memória. Os autores observaram que os termos

“*streamline upwind*” surgem naturalmente na formulação GLS, na qual funções de base de mesma ordem podem ser usadas para todos os campos de variáveis e que as equações algébricas não lineares resultantes originam uma matriz jacobiana positivo definida, devido aos termos de mínimos-quadrados. Além disso, as funções de base de mesma ordem permitem uma numeração baseada nos nós, em vez de ser baseada nos elementos, propiciando operações matriciais muito mais rápidas em máquinas paralelas com memória distribuída.

Formulações multcampos de elementos finitos foram introduzidas pela primeira vez em termos de tensão, pressão e velocidade, no contexto do problema de Stokes. Marchal e Crochet (1986) propuseram uma aproximação de elementos finitos para a tensão utilizando polinômios de Hermite como funções de forma, mostrando que esta formulação assegura a mesma solução para os problemas em dois campos e em três campos. Em um trabalho subsequente, Marchal e Crochet (1987) introduziram elementos finitos compostos por diversos subelementos, obtendo resultados estáveis para os campos de velocidade e tensão. Fortin e Pierre (1989) provaram que o elemento proposto por Marchal e Crochet (1987) satisfaz a condição de Babuška-Brezzi para os subespaços de tensão e velocidade. Franca e Stenberg (1991) introduziram uma formulação estabilizada em três campos baseada na formulação de Galerkin para o problema de Stokes, estabelecendo as propriedades de estabilidade e de convergência. Outros autores também utilizaram formulações em três campos (Baranger e Sandri, 1992; Ruas et al., 1993; Baaijens, 1998; Araujo e Ruas, 1998; Bonvin et al. 2001).

Behr et al. (1993) aprimoraram os resultados de Franca e Stenberg (1991), utilizando uma formulação estabilizada em três campos bastante semelhante, mas incorporando os termos de inércia e usando um parâmetro de estabilidade que é uma

função do número de Reynolds de malha local e do tamanho dos elementos da malha. Este conceito já havia sido proposto anteriormente, para o caso de uma formulação estabilizada em dois campos por Franca e Frey (1992). Bonvin et al. (2001) apresentaram uma formulação estabilizada em três campos para o problema de Stokes baseada em uma versão linearizada do modelo de Oldroyd-B, dividindo a função de viscosidade em duas partes: uma porção polimérica e uma porção de solvente. Este conceito foi sugerido pela primeira vez por Crochet e Keunings (1982). Ruas e colaboradores (veja, por exemplo, Araujo e Ruas (1998) e referências citadas) propuseram novos elementos mistos e realizaram a análise numérica de uma formulação multicampos para o problema de Stokes. Zinani e Frey (2008) empregaram um formulação de Galerkin mínimos-quadrados multicampos, baseada no esquema proposto por Behr et al. (1993), para simular escoamentos de fluidos de Carreau através de contrações abruptas.

1.3. Conteúdo da tese

Finalizando este capítulo, para um melhor entendimento e apreciação deste trabalho é conveniente apresentar um plano geral de seus capítulos. Neste capítulo foi feita uma introdução do trabalho, incluindo sua motivação e o estado da arte do método de elementos finitos em fluidos e do escoamentos de fluidos inelásticos.

No capítulo 2, após uma breve revisão de cinemática dos meios contínuos, são apresentadas e discutidas as equações de balanço da Dinâmica de Fluidos, supondo escoamento isotérmico. No capítulo 3 são apresentadas as relações constitutivas utilizadas na modelagem de fluidos inelásticos. Alguns fenômenos típicos de

comportamento não newtoniano são comentados. Ao final do capítulo apresenta-se o modelo de Bingham regularizado pela equação proposta por Papanastasiou (1987), que será empregado neste trabalho.

No capítulo 4 apresenta-se a aproximação por Elementos Finitos, inicialmente empregando a formulação clássica de Galerkin e, em seguida, a metodologia estabilizada a ser empregada neste trabalho – a metodologia de Galerkin mínimos-quadrados com aproximação em três campos, a saber: pressão, velocidade e tensor extra de tensões. Ao final do capítulo, define-se o problema de valor de contorno a ser simulado, sua aproximação via Galerkin mínimos-quadrados e descreve-se a metodologia de solução do sistema de equações discretizadas.

No capítulo 5 apresentam-se os resultados obtidos na simulação de escoamentos de fluidos de Bingham-Papanastasiou em expansões abruptas 1:4. No capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Equações da Dinâmica dos Fluidos

2.1. Introdução

Neste capítulo são apresentadas as principais expressões da mecânica dos meios contínuos que serão usadas para descrever a dinâmica dos fluidos. Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada em Gurtin (1981) e Slattery (1999).

A mecânica do contínuo estuda a matéria em nível macroscópico, supondo escalas de dimensões suficientemente grandes, se comparadas às escalas das estruturas moleculares, de forma a tratar a matéria como um contínuo, no qual todas as quantidades físicas de interesse – incluindo a densidade – são continuamente diferenciáveis. Um corpo B de geometria conhecida, sujeito a carregamento

conhecido no espaço euclidiano tridimensional, é considerado um conjunto de partículas materiais (cada partícula seria um conjunto de moléculas) e possui uma distribuição de matéria contínua no espaço e no tempo. A região do espaço euclidiano ocupada pelo contínuo B num dado tempo t é denominada configuração do corpo. A descrição matemática da deformação de um corpo contínuo pode seguir duas abordagens – descrição material ou lagrangiana e descrição espacial ou euleriana, que é a mais utilizada em Mecânica dos Fluidos.

A figura 2.1 mostra uma partícula P que ocupa inicialmente uma posição \mathbf{X} numa configuração de referência (estado não deformado) e, após a aplicação de um determinado carregamento, o contínuo assume uma nova configuração (estado deformado), denotada por configuração atual ou deformada, na qual a partícula P passa a ocupar uma posição \mathbf{x} . Considera-se um sistema de coordenadas cartesianas para especificar o ponto material P , tanto na configuração de referência $\mathbf{X}=(X_1, X_2, X_3)$ como na configuração atual $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$.

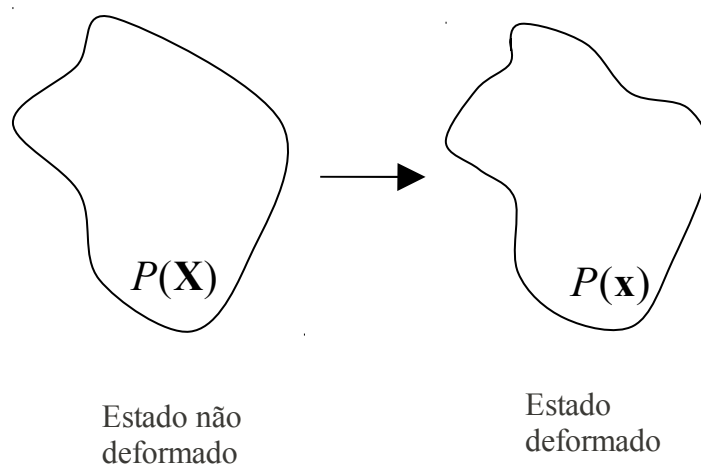


Figura 2.1. Representação gráfica de uma deformação arbitrária de um material contínuo.

O comportamento pode ser determinado pelas equações de conservação (massa, momentum linear e angular e energia), pela segunda lei da Termodinâmica e por hipóteses constitutivas que descrevem o comportamento do corpo sujeito à ação de forças.

A modelagem dos fenômenos em dinâmica de fluidos consiste numa combinação das equações de continuidade e de quantidade de movimento linear com uma relação constitutiva para o tensor de tensões de Cauchy, originando um sistema de equações diferenciais parciais, sujeito a condições iniciais e de contorno. Estes problemas, em geral, não apresentam uma solução analítica, o que leva ao emprego de métodos numéricos, com o objetivo de se obter uma aproximação para a solução do problema original. A aplicação de métodos numéricos na resolução de problemas provenientes da dinâmica de fluidos origina a área denominada Dinâmica de Fluidos Computacional, uma linha de pesquisa fortemente explorada nos últimos anos, em função de sua crescente aplicação nas mais diversas áreas da Engenharia e, em especial, a Engenharia Mecânica.

2.2. Cinemática

No movimento de partículas fluidas suas trajetórias podem ser descritas por uma equação que admite inversa, de forma a ter-se o movimento de uma partícula material no espaço euclidiano dado por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ representa a posição na configuração de referência da partícula observada. A descrição dada pela equação (2.1) é chamada descrição

lagrangiana, que caracteriza a posição \mathbf{X} na configuração de referência da partícula P no instante t . Na descrição do movimento de um fluido, usualmente trabalha-se com as chamadas coordenadas eulerianas (\mathbf{x}, t) , que estão associadas à configuração atual do corpo. Como a equação (2.1) é inversível, a posição na configuração de referência da partícula em observação é dada por: $\mathbf{X} = \mathcal{X}^{-1}(\mathbf{x}, t)$.

Seja ψ uma quantidade física qualquer (temperatura, densidade, etc) transportada pelo movimento das partículas em um fluido. Segundo a descrição lagrangiana, esta quantidade é vista como $\psi = \hat{\psi}(\mathbf{X}, t)$. Por outro lado, na descrição euleriana, a quantidade é representada por uma função $\psi = \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t)$, que denota o valor desta mesma quantidade no ponto \mathbf{x} , no tempo t . Assim, descrevendo o caminho de uma partícula fluida definido pela equação (2.1), podemos expressar a taxa de variação da quantidade $\tilde{\psi}(\mathbf{x}, t)$ como,

$$\frac{\partial d}{\partial t} \tilde{\psi}[\mathcal{X}(\mathbf{X}, t), t] = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t) + (\text{grad } \tilde{\psi}(\mathbf{x}, t)) \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

A taxa de variação da quantidade ψ , representada acima é denominada derivada material, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} + (\text{grad } \psi) \cdot \mathbf{u} \quad (2.3)$$

onde o primeiro termo representa a derivada local, que denota a dependência de ψ em relação ao tempo enquanto o segundo termo, a derivada convectiva, ocorre devido ao transporte da quantidade ψ em função do movimento do fluido.

A distribuição de velocidades num meio contínuo representa a taxa de variação da posição de um campo material, sendo obtida a partir da derivada do campo \mathcal{X} (o movimento), dada por:

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (2.4)$$

Sua descrição espacial, dada por: $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$, é usualmente empregada em dinâmica dos fluidos. Define-se a aceleração de uma partícula como a taxa de

variação da velocidade $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, convenientemente expressa como a

derivada material de um campo espacial, dada por:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (2.5)$$

2.3 Conservação de Massa

Seja $\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar, vetorial ou tensorial continuamente diferenciável e o mapeamento $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, também, continuamente diferenciável. Considere o transporte de uma quantidade ψ , em uma região Ω_t , com fronteira $\partial \Omega_t = \Gamma_t$. Então, para cada Ω_t , considerando a transformação de Green (Slattery, 1999) tem-se o Teorema do Transportes de Reynolds:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \psi d\Omega = \int_{\Omega_t} \left[\frac{d\psi}{dt} \right] d\Omega + \int_{\Gamma_t} \psi \mathbf{u} \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.6)$$

A massa de um corpo B independe do tempo. Considerando $\rho = \hat{\rho}(\mathbf{x}, t)$ sua massa específica, a massa do corpo B ocupando uma região Ω é dada por .

$M = \int_{\Omega} \rho d\Omega$. Logo a conservação de massa pode ser expressa como:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = 0 \quad (2.7)$$

substituindo no Teorema de Transporte, dado pela equação (2.6), tem-se

$$\int_{\Omega} \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} \right] d\Omega = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\Gamma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad (2.8)$$

Como esta equação é válida para um volume Ω arbitrário, o teorema de localização, Gurtin (1981), permite obter, para cada ponto, o balanço diferencial, que pode ser representado como

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.9)$$

No caso de escoamento isocórico, a equação pode ser escrita como

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad (2.10)$$

2.4. Balanço de Momentum Linear

As equações de movimento para um corpo B são postuladas a partir da aplicação do primeiro axioma de Euler. Além das forças de corpo externas por unidade de massa $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ atuando na configuração Ω do corpo, existem também as forças de contato exercidas pelo meio externo sobre a fronteira dessa configuração $(\partial\Omega = \Gamma)$, representadas pelo vetor tensão \mathbf{t} e medidas por unidade de área de Γ .

Em um volume diferencial arbitrário, as forças de contato representam as forças que, devido à presença de tensões internas, agem entre partes de um corpo \mathbf{B} . A forma das forças de contato pode ser avaliada empregando-se a *hipótese de Cauchy*

(Gurtin, 1981), um dos mais importantes axiomas da Mecânica do Contínuo. Cauchy supôs a existência de uma densidade de forças de superfície $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$, definida para cada vetor unitário normal exterior \mathbf{n} e cada instante de tempo t na trajetória (\mathbf{x}, t) do movimento, dotado da seguinte propriedade: considerando uma superfície orientada de Γ , um corpo com normal unitária exterior \mathbf{n} em \mathbf{x} , o vetor $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ – denominado vetor tensão – representa a força por unidade de área exercida no interior do corpo, através da superfície Γ , por seu exterior. A resultante de forças e de momentos da distribuição de vetores tensão \mathbf{t} é equivalente à resultante das forças exercidas pelo lado exterior de Γ no seu lado interior – representando a força de contato total exercida num corpo num dado instante e a distribuição \mathbf{t} depende linearmente da orientação do elemento de superfície, além de depender da posição e do tempo.

Pelo princípio da conservação de momentum linear temos que a taxa de variação do momentum linear corpo contido num volume material Ω com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$, em relação a um referencial inercial, é igual a soma das forças que atuam sobre o corpo, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) d\Gamma + \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega \quad (2.11)$$

Empregando os mesmos argumentos já utilizados na conservação de massa, utilizando a definição do tensor de Cauchy (Gurtin, 1981) e o fato da equação (2.11) ser válida para um volume arbitrário, podemos expressar o balanço de momento linear para uma mistura de múltiplos componentes a ser satisfeito em cada ponto, na forma local:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \text{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} \quad (2.12)$$

2.5. Balanço de Momentum Angular

Podemos definir a taxa de variação no tempo da quantidade de movimento angular de um corpo B , em relação a um referencial inercial com origem \mathbf{o} , como sendo a soma dos momentos das forças que atuam sobre ele. Assumindo a hipótese não polar, que supõe que todos os torques que atuam no corpo B sejam provenientes de forças atuando sobre B , a equação de conservação de quantidade de movimento linear será dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \mathbf{t}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) d\Gamma \\ + \int_{\Gamma} \mathbf{r}(\mathbf{x}) \times \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) d\Omega \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$ é o vetor posição a partir da origem \mathbf{o} e a força por unidade de massa \mathbf{f} foi definida anteriormente.

A forma local do balanço de momentum angular é obtida combinando a definição do tensor tensão de Cauchy, definido a partir do vetor tensão:

$\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}, t; \mathbf{n}) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}$ e a equação de conservação de quantidade de movimento linear (2.12). Essencialmente, ela impõe a simetria do tensor de Cauchy,

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T \quad (2.14)$$

Capítulo 3

Relações Constitutivas

3.1. Introdução

As leis de balanço para a massa, e para as quantidades de movimento linear e angular foram postuladas independente do material considerado, não fazendo nenhuma referência às propriedades do corpo em questão. Supondo que o campo de esforços externos seja dado pelo campo gravitacional, o estudo da dinâmica dos fluidos requer uma equação constitutiva dos esforços internos – exercidos por uma dada porção no corpo nas porções vizinhas, expresso através do tensor tensão de Cauchy – que deve ser relacionado à deformação por ele causada. Resumindo, a equação constitutiva deve expressar a relação entre as forças de contato, os movimentos e as deformações, através de uma representação matemática da

dependência funcional entre a tensão e a taxa de deformação, de forma termodinamicamente consistente, ou seja, não violando a segunda lei da Termodinâmica.

Uma relação constitutiva é construída supondo que o possível comportamento seja restrito por um conjunto de princípios, a saber (Slattery, 1999; Ferguson e Zemblowski, 1991): os princípios do determinismo, da ação local, da indiferença material, da objetividade material e da memória evanescente.

Segundo Slattery (1999), os princípios do determinismo e da ação local são satisfeitos supondo que a tensão num ponto seja função do gradiente de velocidade no ponto, ou seja: $\mathbf{T} = \mathbf{H}(\mathbf{u}, \nabla \mathbf{u})$, sendo $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$, onde $\mathbf{D} = 1/2(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ é o tensor taxa de deformação e $\mathbf{W} = 1/2(\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T)$ é o tensor vorticidade, podendo-se expressar a relação como $\mathbf{T} = \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{D} + \mathbf{W})$.

Usando o princípio da indiferença material, após concluir que \mathbf{D} é uma grandeza objetiva enquanto \mathbf{W} é não objetiva, verifica-se que o tensor tensão é função do tensor taxa de deformação: $\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{D})$ e a função tensorial \mathbf{G} deve satisfazer a relação $\mathbf{Q}\mathbf{G}(\mathbf{D})\mathbf{Q}^T = \mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T)$, sendo \mathbf{Q} um tensor ortogonal. No caso de materiais isotrópicos, a forma mais geral para \mathbf{G} satisfazendo essa relação, obtida por Reiner e Präger (Slattery, 1999), é:

$\mathbf{G}(\mathbf{D}) = \mathbf{T} = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{D} + \beta_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D}$, onde os coeficientes β_i são funções dos três invariantes principais de \mathbf{D} : $I_{\mathbf{D}} = tr \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{v}$, $II_{\mathbf{D}} = 1/2(I_{\mathbf{D}}^2 - \tilde{II}_{\mathbf{D}})$ e $III_{\mathbf{D}} = det \mathbf{D}$, com $\tilde{II}_{\mathbf{D}} = tr(\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}) = tr \mathbf{D}^2$. Essa equação constitutiva satisfaz

automaticamente o segundo princípio de Cauchy, já que o tensor taxa de deformação é simétrico.

3.2 Fluido newtoniano

A caracterização local do estado dinâmico do escoamento de um fluido é dada pelo tensor tensão \mathbf{T} enquanto a caracterização do estado cinemático pelo tensor taxa de deformação \mathbf{D} . O comportamento newtoniano supõe uma relação linear entre o tensor tensão e o tensor taxa de deformação, consistente com o Princípio de Indiferença Material, dada por:

$$\mathbf{T} = \beta_0 \mathbf{I} + \beta_1 \mathbf{D} + \beta_2 \mathbf{D} \cdot \mathbf{D} \quad (3.1)$$

Como a relação é linear, β_2 tem que ser nulo, β_1 deve ser constante e a forma linear mais geral para β_0 seria uma relação dependente do traço do tensor taxa de deformação \mathbf{D} . Portanto a equação para fluidos newtonianos é caracterizada pelos seguintes coeficientes β_i da equação de Reiner e Präger: $\beta_0 = -P + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}$, $\beta_1 = 2\mu$ e $\beta_2 = 0$. Logo:

$$\mathbf{T} = (-P + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \quad (3.2)$$

onde P é a pressão termodinâmica, μ a viscosidade absoluta e o coeficiente λ , em geral, positivo, é relacionado à viscosidade absoluta através da segunda lei da Termodinâmica, que permite concluir que $\lambda \geq -2/3\mu$. A segunda lei também impõe uma restrição à viscosidade absoluta: $\mu \geq 0$.

Neste trabalho serão estudados escoamentos incompressíveis, sendo o tensor tensão para fluidos newtonianos dado por:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{D} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (3.3)$$

sendo $\boldsymbol{\tau}$ o tensor desviador ou viscoso ($tr\boldsymbol{\tau} = 0$), também denotado como tensor extra de tensões.

Esta equação não é um caso particular de (3.2), uma vez que, para fluidos incompressíveis, a pressão termodinâmica P não é definida. A pressão p é uma pressão hidrostática ou média, podendo ser definida como $p = -1/3 tr\mathbf{T}$, que funciona como um multiplicador de Lagrange e não é variável termodinâmica.

A caracterização local dos estados dinâmico e cinemático, dadas por \mathbf{T} e \mathbf{D} , pode ser muito simplificada em determinadas classes de escoamento, como para os chamados de *escoamentos viscométricos*.

Considere o exemplo mais elementar de escoamento de cisalhamento simples, no qual ocorre um deslocamento relativo de planos paralelos infinitamente delgados do fluido, escoando em cisalhamento simples, como mostrado na figura 3.1.

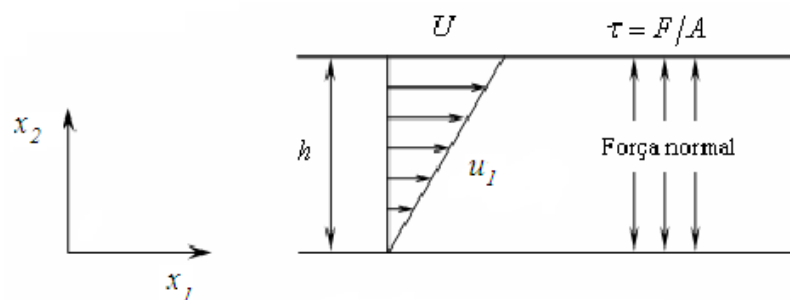


Figura 3.1. Experimento ideal para determinar a relação entre as tensões cisalhantes e a velocidade de deformação.

Assumindo o sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) , onde a direção x_1 é a direção do escoamento, a direção x_2 a direção da variação da velocidade

do fluido, e a direção x_3 é uma direção na qual não ocorre variação, devido à hipótese dos planos infinitos. Portanto, os componentes da velocidade são dados por

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_2) \\ u_2 &= u_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nesse caso, a medida do estado da deformação local é dado pelo tensor tensão de cisalhamento τ , representado, neste escoamento, por

$$\tau = \tau_{12} \quad (3.5)$$

e a medida do estado da cinemática local da deformação é dada pela taxa de deformação $\dot{\gamma}$,

$$\dot{\gamma} = \frac{du_1}{dx_2} \quad (3.6)$$

No escoamento cisalhante de um fluido newtoniano tem-se que $\tau = \mu \dot{\gamma}$, ou ainda

$$\tau = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (3.7)$$

onde μ é a viscosidade newtoniana do fluido, ou seja, uma medida da intensidade da dissipação da energia que é necessária para manter a deformação irreversível do fluido. A viscosidade μ de um fluido newtoniano é constante, para uma dada temperatura e pressão e a equação (3.7) é conhecida como a lei de Newton da viscosidade. Esta relação constitutiva impõe que cada componente do tensor tensão de cisalhamento τ é proporcional ao gradiente de velocidade na direção normal a essa componente – a chamada taxa de deformação por cisalhamento fluido, $\dot{\gamma}$ – sendo a constante de proporcionalidade dada por sua viscosidade μ (Ferguson e Kemblowski, 1991).

3.3. Comportamento não newtoniano

De acordo com a lei de Newton da viscosidade (equação (3.7)) o diagrama que relaciona a tensão de cisalhamento e a taxa de deformação de um fluido newtoniano é uma linha reta que passa pela origem. A inclinação dessa reta é igual à viscosidade μ do fluido e o diagrama do gráfico $\tau \times \dot{\gamma}$ é chamado de curva de escoamento.

Todos os fluidos inelásticos que possuem uma curva de escoamento, $\tau = f(\dot{\gamma})$, não linear, ou mesmo uma curva linear que não passe pela origem (exibindo tensão de escoamento), são chamados de *fluidos não newtonianos*. Esta classificação, em oposição ao comportamento newtoniano, foi originada quando as propriedades dos fluidos não newtonianos eram consideradas anômalas. Hoje em dia, a tendência é considerar os fluidos newtonianos como um caso especial de uma categoria mais geral de fluidos: os chamados fluidos newtonianos generalizados ou inelásticos.

Os fluidos inelásticos são fluidos dissipativos, por serem incapazes de acumular energia interna por deformação de suas moléculas e posteriormente devolvê-la ao escoamento, devido a uma mudança de suas características. Sua propriedade fundamental é a viscosidade de cisalhamento (ou viscosimétrica) e eles se caracterizam por um tempo de relaxação nulo. Fluidos newtonianos como ar e água são considerados inelásticos, uma vez que seus tempos de relaxação nas CNTP são da ordem de 10^{-13} s a 10^{-12} s (Tanner, 1985), portanto, praticamente nulos. Nas soluções poliméricas, os aditivos que tornam a viscosidade de cisalhamento variável e dependente da taxa de deformação, são também responsáveis pela viscoelasticidade. O comportamento inelástico, apesar de ser uma aproximação, é bastante útil para a

interpretação dos fluidos e a medição de sua viscosidade de cisalhamento. A viscosidade de cisalhamento (η) é definida a partir de um escoamento plano de Couette, mostrado na figura 3.1, como a razão entre a tensão de cisalhamento (τ_{12}) e a respectiva taxa de deformação ($\dot{\gamma}_{12}$), ou seja: $\eta = \tau_{12} / \dot{\gamma}_{12}$ com $\dot{\gamma}_{12} = du_1/dx_2$.

Dois tipos de comportamento em relação à viscosidade de cisalhamento η são apresentados pelos fluidos reais: pseudoplástico, também conhecido como reofluidificante (“*shear-thinning*”), que representa os fluidos mais comuns, como celulose carboxi-metílica ou goma de xantano. Este comportamento é caracterizado por um patamar de viscosidade constante a baixas taxas de deformação, $\dot{\gamma}_{12}$, quando η tem valor elevado e um segundo patamar de viscosidade constante a altas velocidades de deformação $\dot{\gamma}_{12}$ e pequenos valores de η , mostrados na figura 3.2. Entre estes dois patamares η diminui à medida que $\dot{\gamma}$ aumenta. O outro comportamento é o dilatante, também conhecido como reoespessante (“*shear-thickening*”), presente em suspensões de partículas de formas irregulares e soluções de agentes tensoativos, caracterizado pelo aumento de η à medida que $\dot{\gamma}$ aumenta (Pinho e Cruz, 2006).

Dentre os fluidos não newtonianos, o comportamento mais comum é o pseudoplástico, presente, por exemplo, em soluções e ligas poliméricas, suspensões de partículas assimétricas (como fibras) e suspensões coloidais. Ferguson e Zemblowski (1991) propuseram uma explicação física simplificada para este fenômeno, que poderia resultar da orientação das moléculas dispersas de polímeros ou partículas assimétricas, da imobilização de parte da fase contínua pelas partículas ou moléculas dispersas ou da combinação dos dois fatores. Por exemplo, no caso de soluções de

cadeias poliméricas lineares com concentração suficientemente alta, as macromoléculas em repouso podem embarçar-se, originando, com isso, macromoléculas de tamanho efetivo muito grande. No processo de cisalhamento, ocorreria um desembaraço progressivo das cadeias poliméricas, que aumentaria com o aumento da taxa de deformação, provocando uma diminuição no atrito interno do sistema, devido à diminuição no tamanho efetivo e na interação entre as macromoléculas.

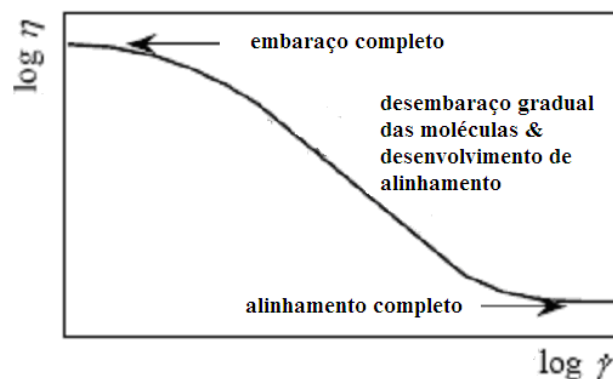


Figura 3.2. Curva de escoamento para uma solução polimérica mostrando dois extremos de um completo emaranhamento e alinhamento (Barnes, 2000).

Um processo similar ocorreria no caso das partículas assimétricas, que ocupariam posições completamente randômicas em repouso, movimentando-se devido a correntes de convecção, originadas por diferenças de temperatura (movimento térmico) alinhando-se, progressivamente ao longo das linhas de corrente, devido ao aumento da taxa de deformação, o que provocaria diminuição no atrito interno. Esta diminuição progressiva no atrito interno também poderia originar-se da separação de solvente e soluto em soluções, provocada pelo aumento da taxa de

deformação $\dot{\gamma}$, que diminuiria a forte ligação das moléculas na fase contínua (por exemplo, devido a forças de van der Waals ou pontes de hidrogênio).

Segundo Ferguson e Zemblowski (1991) os mecanismos de pseudoplasticidade (“*shear-thinning*”) também podem explicar as regiões de viscosidade constante ($\eta = \eta_0$ para $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ e $\eta = \eta_\infty$ para $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, nas figuras 3.2 e 3.4) em sistemas com partículas assimétricas ou cadeias poliméricas lineares: quando $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ o efeito de orientação devido ao cisalhamento é desprezível e a estrutura do sistema fica determinada pelo movimento térmico desorientado, provocando um atrito interno constante, e máximo, no sistema; já quando $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, o efeito de orientação devido ao cisalhamento é máximo, provocando um atrito interno constante, e mínimo. As teorias que explicam o mecanismo de pseudoplasticidade supõem um ajuste imediato da estrutura do fluido às condições de cisalhamento, uma simplificação razoável, devido ao rápido ajuste (Ferguson e Zemblowski, 1991).

O fenômeno de dilatância pode ser explicado (Ferguson e Zemblowski, 1991) considerando uma suspensão altamente concentrada de partículas granulares num líquido que, em repouso, tem o espaço entre as partículas (preenchido pelo líquido) próximo de um mínimo. A baixas taxas de cisalhamento o atrito entre as partículas é pequeno, porque o líquido atua como um lubrificante. À medida que a taxa de cisalhamento aumenta o movimento entre as partículas, que provoca um aumento do vazio (o espaço entre as partículas) e o líquido torna-se insuficiente para preencher o vazio, levando a uma diminuição do efeito lubrificante, que resulta num progressivo aumento do atrito – por isso conhecido como dilatância. Ela também poderia ser explicada no caso de suspensões altamente concentradas de partículas com cargas eletrostáticas de mesmo sinal. A forte força de repulsão entre as partículas a baixas taxas de cisalhamento provoca um intenso movimento das partículas apesar de sua

alta concentração e a viscosidade do sistema fica próxima da viscosidade da fase contínua líquida. À medida que a taxa de cisalhamento aumenta, a distribuição das partículas vai perdendo a uniformidade e as partículas acabam por entrar em contato entre si, formando uma rede de partículas e provocando um progressivo aumento do atrito interno, que explica o comportamento dilatante (“*shear-thickening*”). À medida que a taxa de cisalhamento diminui, o sistema tende a voltar a seu estado “fluido” (Ferguson e Zemblowski, 1991).

Ferguson e Zemblowski (1991) também explicam fisicamente fenômenos ligados à tensão de escoamento, que ocorrem em sistemas multifásicos, com uma ou mais fases dispersas como bolhas ou partículas na fase líquida contínua. A altas concentrações das fases dispersas, a interação entre as bolhas ou partículas pode levar à formação de uma estrutura tridimensional, capaz de resistir a tensões cisalhantes até um dado limite (a tensão de escoamento), comportando-se como um sólido abaixo deste limite. Ao ser atingida a tensão de escoamento esta estrutura se rompe e o material inicia um escoamento, como um fluido viscoso, cujo comportamento pode ser explicado pelas propriedades da fase contínua. Segundo Ferguson e Zemblowski (1991), partículas dispersas num líquido newtoniano têm comportamento de fluido de Bingham, enquanto partículas dispersas num líquido pseudoplástico apresentam comportamento de fluido de Herschel-Bulkley. Por outro lado, sempre que a tensão cisalhante cair a valores abaixo da tensão de escoamento, a estrutura instantaneamente se reconstrói e o material volta a se comportar como sólido.

Na figura 3.3 são apresentadas algumas curvas de escoamento de fluidos não newtonianos inelásticos. Uma classificação preliminar dessas curvas distingue as curvas que partem da origem, daquelas que apresentam uma interceptação no eixo da tensão cisalhante. A primeira categoria descreve fluidos que não possuem a chamada

tensão limite de escoamento, e a segunda descreve fluidos que apresentam essa tensão limite. A tensão limite de escoamento consiste em uma tensão de cisalhamento a partir da qual o material começaria a escoar.

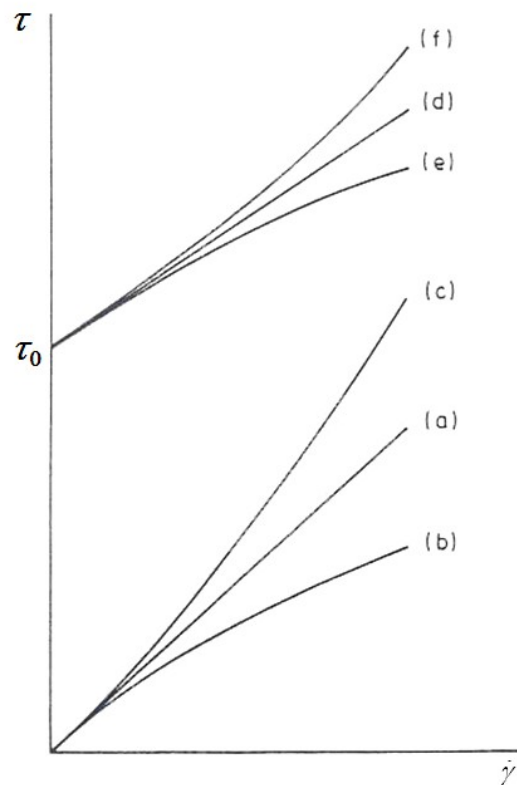


Figura 3.3 Curvas de escoamento de fluidos newtonianos generalizados (Ferguson e Kemblowski, 1991).

As propriedades reológicas de fluidos que não apresentam tensão limite são descritas pelas curvas do tipo (a), (b) e (c). A curva (a) é uma curva de escoamento de um fluido newtoniano, que modela adequadamente a maioria dos fluidos como gases, líquidos puros e a maioria das soluções de moléculas simples. No entanto, outros fluidos com estruturas moleculares mais complexas tais como barros, pastas, géis, soluções de polímeros, fluidos orgânicos (sangue, mucosidades), graxas e óleos

lubrificantes muito viscosos, apresentam comportamentos conhecidos como não newtonianos.

A curva (b) caracteriza os fluidos *pseudoplásticos* nos quais a tensão de cisalhamento tem um aumento proporcionalmente menor que o aumento da taxa de cisalhamento, quando comparado à curva (a); enquanto a curva (c) caracteriza os fluidos *dilatantes* com um aumento da tensão de cisalhamento proporcionalmente maior do que o aumento da taxa de cisalhamento da curva (a). O modelo mais simples para o comportamento mostrado nas curvas (b) e (c) é o modelo “*power-law*” de Ostwald-de Waele.

As propriedades dos fluidos com uma tensão limite – uma tensão de escoamento, τ_0 , cuja curva de escoamento intercepta o eixo do tensor τ em τ_0 – ou *viscoplásticos*, são descritos pelas curvas do tipo (d), (e) e (f)), já que sua estrutura interna possui alguma rigidez, originando uma tensão cisalhante crítica mínima (τ_0), que deve ser vencida para que se inicie o escoamento, comportando-se como fluidos quando é excedida determinada tensão de cisalhamento e como sólidos, em caso contrário. Nestes fluidos o primeiro patamar newtoniano de viscosidade não é observado. A viscosidade η aumenta indefinidamente à medida que a taxa de deformação $\dot{\gamma}$ diminui. Exemplos de fluidos reais com este comportamento são pasta de dentes, maionese, sangue e suspensões de partículas, quando o solvente apresenta moléculas de alto peso molecular. O caso mais simples consiste em uma reta, mostrada na curva (d) da Fig. 3.3, que descreve o comportamento dos fluidos de Bingham. As curvas (e) e (f) descrevem materiais com uma tensão limite e uma curva de escoamento não linear, os chamados *fluidos viscoplásticos não-lineares*, como, por exemplo, o fluido de Herschel-Bulkley. (Ferguson e Kembrowski, 1991).

3.4 Fluido newtoniano generalizado

Todos os comportamentos não newtonianos inelásticos apresentados pelos fluidos discutidos na Fig. 3.3 podem ser descritos pelo modelo de fluido newtoniano generalizado (GNL), o qual generaliza a lei de Newton da viscosidade (equação (3.7)) permitindo que a viscosidade seja uma função dependente da taxa de deformação do material. Matematicamente, um fluido newtoniano generalizado, que representa um fluido puramente viscoso com viscosidade dependente da taxa de cisalhamento é descrito por:

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (3.8)$$

onde τ representa a tensão de cisalhamento, $\dot{\gamma}$ a taxa de deformação e η é a viscosidade de cisalhamento, que depende da taxa de deformação,

$$\eta = \hat{\eta}(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \neq \text{constante} \quad (3.9)$$

Considerando a relação (3.8) para um escoamento geral de um fluido inelástico não newtoniano a forma tensorial fica:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad (3.10)$$

Conhecidas as viscosidades de cisalhamento, $\eta(\dot{\gamma})$, esta equação permite descrever os comportamentos observados na figura 3.3.

O escalar $\dot{\gamma}$ (taxa de deformação) representa a norma de Frobenius do tensor \mathbf{D} , uma medida matemática da taxa de cisalhamento quando é suposto um escoamento sujeito a cisalhamento simples, ou seja

$$\dot{\gamma} = (2 II_{\mathbf{D}})^{1/2} = (2 tr \mathbf{D}^2)^{1/2} \quad (3.11)$$

O modelo mais simples para um fluido newtoniano generalizado é o modelo “power-law” de Ostwald- de Waele, capaz de descrever, da forma simples, curvas dos tipos (b) e (c) observados na figura 3.3, além da curva (a). Neste modelo, o tensor extra-tensão é dado por (Slattery, 1999)

$$\tau = k \dot{\gamma}^n \quad (3.12)$$

com dois parâmetros reológicos a serem determinados: k e n . Para $n=1$ tem-se um fluido com comportamento newtoniano, mostrado na curva (a), para $n<1$ uma curva $\eta = \hat{\eta}(\dot{\gamma}) = \tau/\dot{\gamma} \neq \text{constante}$ de escoamento do tipo (b) é obtida, caracterizando um comportamento pseudoplástico, enquanto para $n>1$ o comportamento é dilatante, mostrado na curva (c). Considerando o modelo de Ostwald- de Waele, obtido a partir de curvas empíricas ajustadas a partir de curvas experimentais de $\eta(\dot{\gamma})$, pode-se escrever a viscosidade de cisalhamento (a ser utilizada na equação (3.10) que caracteriza um comportamento newtoniano generalizado) como

$$\eta(\dot{\gamma}) = k \dot{\gamma}^{(n-1)} \quad (3.13)$$

A equação (3.13) mostra que, para fluidos *pseudoplásticos*, ($n<1$) a viscosidade $\eta(\dot{\gamma})$ é uma função decrescente da taxa de deformação $\dot{\gamma}$, enquanto a viscosidade $\eta(\dot{\gamma})$ é uma função crescente da taxa de deformação $\dot{\gamma}$, para fluidos *dilatantes* ($n>1$). Naturalmente, para ($n=1$), a viscosidade não varia com a taxa de deformação.

Em quase todos os problemas industriais, a região linear descendente (região “power-law”) de um gráfico $\log \eta \times \log \dot{\gamma}$ mostrada na figura 3.4, é, reologicamente, a região mais importante. De fato, para muitos viscosímetros mais simples e para muitos fluidos, é quase impossível obter dados para o platô horizontal

da curva de viscosidade aparente $\eta(\dot{\gamma})$. Já a reta inclinada desta região pode ser descrita por uma simples expressão “*power-law*” como a equação (3.13).

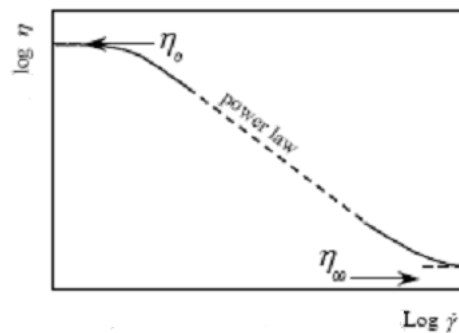


Figura 3.4. Comportamento da viscosidade no modelo “*power law*”. (Barnes, 2000)

O modelo “*power-law*” para a viscosidade não-newtoniana $\eta(\dot{\gamma})$ definido na equação (3.13), é o modelo empírico mais conhecido e o mais usado em Engenharia, sendo empregado na solução analítica de uma extensa gama de escoamentos. Pode-se obter uma estimativa aproximada do efeito da viscosidade não-newtoniana através de cálculos baseados na equação (3.13). Entretanto, as limitações do modelo “*power-law*” não devem ser negligenciadas. Por exemplo, para fluidos pseudoplásticos ($n < 1$) o modelo prevê $\eta \rightarrow \infty$ para $\dot{\gamma} \rightarrow 0$ e $\eta \rightarrow 0$ para $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, embora nos dois casos o valor de η se aproxime de um valor constante finito, ou seja para $\dot{\gamma} \rightarrow 0$, $\eta = \eta_0$ enquanto para $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$, $\eta = \eta_\infty$, com $\eta_0 > \eta_\infty$, para $n < 1$. A figura 3.4, para um fluido newtoniano generalizado sem tensão de escoamento, ilustra esta tendência, identificando 3 regiões: uma região newtoniana para baixas taxas de cisalhamento com viscosidade constante $\eta = \eta_0$, uma região para valores intermediários da taxa de deformação com viscosidade obedecendo à equação (3.13) e uma outra região newtoniana para altas taxas de

cisalhamento com viscosidade constante $\eta = \eta_\infty$. Como desvantagens do modelo de Ostwald-de Waele, verifica-se que ele não é capaz de determinar a viscosidade para taxas de deformação muito pequenas ou muito grandes. Além disso, os parâmetros reológicos k e n são insuficientes para determinar um tempo característico, como seria desejável do ponto de vista da análise dimensional. Também não é possível relacionar os parâmetros k e n com o peso molecular e concentração, já que as correlações padrão costumam ser descritas em termos de η_0 e η_∞ .

Segundo Ferguson e Kemblowski (1991) uma curva de escoamento como a da figura 3.4 é adequadamente descrita por uma função obedecendo a seguinte forma:

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = f(\dot{\gamma}) \quad (3.14)$$

Os modelos de Carreau e Carreau-Yasuda (uma extensão do modelo de Carreau) satisfazem este postulado. O modelo de Carreau-Yasuda é um modelo com cinco parâmetros reológicos, com flexibilidade para descrever uma grande variedade de curvas experimentais de $\eta(\dot{\gamma})$, mostrando-se útil para simulações numéricas que necessitam uma expressão analítica para a curva de viscosidade não-newtoniana. Matematicamente, este modelo pode ser expresso por (Slattery, 1999):

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = [1 + (\lambda \dot{\gamma})^a]^{(n-1)/a} \quad (3.15)$$

onde η_0 representa a viscosidade aparente quando a taxa de cisalhamento tende a zero, η_∞ a viscosidade aparente quando a taxa de cisalhamento tende ao infinito,

λ é um tempo característico do fluido igual ao inverso do valor da taxa de deformação, $\dot{\gamma}$, no qual a pseudoplasticidade inicia, n o expoente “power-law”, que descreve o coeficiente angular na região “power-law”, e a um parâmetro adimensional que descreve a região de transição entre a região para a taxa de

deformação muito baixa e a região “power-law”. Para muitos polímeros fundidos e soluções poliméricas concentradas, bons ajustes podem ser obtidos para os valores de $a=2$ e $\eta_{\infty}=0$. Logo, a equação (3.15), originalmente proposta a cinco parâmetros, passa a ter somente três parâmetros, a saber, η_0 , λ e n . A equação (3.15) com $a=2$ é usualmente referida como modelo de Carreau, pois parâmetro a foi introduzido, posteriormente, por Yasuda.

O modelo de Bingham – proposto por Bingham em 1922 – é caracterizado pela existência de uma tensão limite de escoamento, τ_0 , a partir da qual o material escoar como um fluido viscoso. O modelo de Bingham é o modelo viscoplástico mais simples, sendo dado por:

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 + \eta_p \dot{\gamma} & \text{se } \tau \geq \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0, & \text{se } \tau < \tau_0 \end{cases} \quad (3.16)$$

onde τ_0 , que representa a tensão de escoamento e η_p , a viscosidade plástica do material, são os dois parâmetros reológicos. Como mostrado na curva (d), após atingida a tensão de escoamento, a viscosidade não varia com a taxa de cisalhamento.

A partir de (3.16) verifica-se que a viscosidade obedece a

$$\begin{cases} \eta = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \eta_p, & \text{se } \tau \geq \tau_0 \\ \eta \rightarrow \infty, & \text{se } \tau < \tau_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

onde τ_0 e η_p foram anteriormente definidos. Caso a tensão de cisalhamento seja menor que a tensão de escoamento ($\tau < \tau_0$) não existirá escoamento, ou seja, a viscosidade do material tenderá a infinito. A equação (3.17) para a viscosidade de cisalhamento prevê um valor de η que decresce à medida que $\dot{\gamma}$ cresce. No caso limite ($\dot{\gamma} \rightarrow \infty$), a viscosidade $\eta \rightarrow \eta_p$, logo o parâmetro η_p pode ser visto como uma viscosidade

correspondente à taxa de cisalhamento infinita η_∞ e a equação de Bingham pode ser escrita como (Ferguson e Kemblowski, 1991):

$$\tau = \tau_0 + \eta_\infty \dot{\gamma} \quad (3.18)$$

Os modelos viscoplásticos clássicos apresentam uma descontinuidade no campo de deformação para valores de tensão iguais a τ_0 . Na verdade, como pode-se verificar pela equação do modelo de Bingham (equação (3.16)), nenhuma informação acerca da distribuição de tensões pode ser obtida nas regiões materiais rígidas. Visando remediar este problema, Papanastasiou propôs uma equação para a regularização das funções viscoplásticas (Papanastasiou, 1987). Esta equação apresenta um parâmetro de regularização m , o qual, quando tende a infinito, faz com que a função viscosidade regularizada pela equação de Papanastasiou tenda à função viscosidade do modelo original de Bingham. A regularização proposta por Papanastasiou tem a grande vantagem de gerar funções de tensão de cisalhamento e viscosidade viscoplástica contínuas, válidas tanto para as regiões de escoamento como para as regiões rígidas. As funções regularizadas para tensão de escoamento e função viscosidade propostas por Papanastasiou (1987) são dadas por

$$\tau = \eta_p \dot{\gamma} + \tau_0 [1 - \exp(-m \dot{\gamma})] \quad (3.19)$$

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_p + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(-m \dot{\gamma})] \quad (3.20)$$

O modelo mais simples capaz de descrever é o modelo de Herschel-Bulkley (Ferguson e Kemblowski, 1991):

$$\begin{cases} \tau = \tau_0 + k \dot{\gamma}^p & \text{se } \eta > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0, & \text{em caso contrario} \end{cases} \quad (3.21)$$

que possui três parâmetros reológicos: o índice de consistência, k , o índice do comportamento “*power-law*”, n e a tensão limite de escoamento, τ_0 .

Observa-se que o fluido de Bingham, para tensões maiores que a tensão limite de escoamento (equação(3.18)), possui características análogas às do modelo de fluido newtoniano (equação(3.3)). Já o modelo Herschel-Bulkey (equação (3.21)), para tensões maiores que a tensão limite de escoamento, possui características análogas às do modelo de fluido de Ostwald-de Waele (equações (3.12)-(3.13)). Como, para alguns escoamentos de fluidos viscoplásticos, nem o modelo de Bingham, nem o modelo de Herschel-Bulkey fornecem bons ajustes de dados reológicos, utilizam-se outros modelos viscoplásticos, como os modelos propostos por Casson e, recentemente, por Souza Mendes e Dutra (2004).

Conforme já foi mencionado, a regularização proposta por Papanastasiou (1987) emprega um parâmetro de regularização m , de tal forma que quando $m \rightarrow 0$ a viscosidade de cisalhamento tende à função viscosidade do modelo viscoplástico original, seja ele pseudoplástico, dilatante ou com viscosidade constante. No caso particular do modelo de Herschel-Bulkley, equação (3.21), a regularização proposta por Papanastasiou fornece a seguinte função de Herschel-Bulkley modificada

$$\tau = (1 - \exp(-\alpha \dot{\gamma}))\tau_0 + k \dot{\gamma}^n \quad (3.22)$$

onde α é o parâmetro de regularização proposto por Papanastasiou.

Outro modelo proposto foi a função bi-viscosidade modificada, a qual apresenta um comportamento qualitativo bastante adequado para fluidos viscoplásticos (Soares, et al., 1999). Matematicamente, o modelo bi-viscosidade é dado pela seguinte expressão:

$$\tau = \begin{cases} \tau_0 + k \dot{\gamma}^n, & \text{se } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_0 \\ \eta_0 \dot{\gamma}, & \text{se } \dot{\gamma} < \dot{\gamma}_0 \end{cases} \quad (3.23)$$

onde η_0 é a viscosidade do fluido para as baixas taxas de cisalhamento.

A função modificada de Papanastasiou para o modelo de Herschel-Bulkley (equação (3.22)) e a função da bi-viscosidade (equação (3.23)) são aplicadas para diferentes taxas da taxa de deformação, sendo essas faixas delimitadas pela taxa de deformação limite do material. Este fato, juntamente com a descontinuidade da primeira derivada dessas funções, pode vir a inviabilizar a obtenção de ajustes de boa qualidade de materiais viscoplásticos (Souza Mendes e Dutra, 2004).

A partir destas dificuldades, Souza Mendes e Dutra (2004) propuseram uma nova função viscosidade, que será denotada por função SMD. Essa nova função viscosidade é contínua e possui primeira derivada também contínua, o que representa uma grande vantagem em relação aos modelos clássicos. O modelo SMD, para tratar comportamento viscoplástico de fluidos, além de apresentar expressões regularizadas para o tensor $\boldsymbol{\tau}$ e para a função viscosidade, utiliza apenas parâmetros reológicos, a saber: a tensão de escoamento τ_0 , a viscosidade η_0 , quando a taxa de cisalhamento tende a zero, o índice de consistência k e o índice de potência n . Este modelo prevê a seguinte expressão para a tensão de cisalhamento:

$$\tau = (\tau_0 + k (\dot{\gamma})^n) (1 - \exp(-\eta_0 \dot{\gamma} / \tau_0)) \quad (3.24)$$

3.5. Algumas observações acerca do modelo de Bingham-Papanastasiou

Neste trabalho serão simulados escoamentos de fluidos viscoplásticos de Bingham (equações (3.16)-(3.17)). Este modelo foi formulado de maneira a permitir uma descontinuidade no campo de tensões de cisalhamento, sendo incapaz de fornecer qualquer informação sobre a distribuição de tensões nas zonas materiais sujeitas a tensões menores que a tensão limite de escoamento τ_0 – as ditas zonas rígidas ou não escoadas. A fim de remediar esta desvantagem do modelo, Papanastasiou (1987) introduziu uma aproximação puramente viscosa, na qual as zonas rígidas são consideradas como zonas extremamente viscosas. Graças a esta aproximação, obtém-se uma distribuição de tensões de cisalhamento contínua para todo o domínio de taxas de cisalhamento, que é válido tanto para regiões materiais escoadas quanto para regiões materiais não escoadas. Esta regularização tem a vantagem de assegurar boa convergência da aproximação numérica, além de permitir uma caracterização adequada das superfícies de escoamento do material. Ela emprega um parâmetro não reológico m que controla a função exponencial, assegurando um crescimento muito rápido da viscosidade nas transições de para regiões escoadas para regiões não escoadas. O modelo, que vem sendo referido no trabalho como modelo de Bingham-Papanastasiou, expresso pelas equações (3.19)-(3.20), descreve por equações contínuas – válidas para todo o domínio, a distribuição de tensões de cisalhamento e a função viscosidade.

Na figura 3.5, são mostradas curvas de escoamento adimensionalizadas, considerando uma tensão de cisalhamento adimensional $\tau^* = \tau/\tau_0$, onde τ é a tensão

tensão de cisalhamento e τ_0 a tensão limite de escoamento. As curvas de escoamento foram parametrizadas pelo parâmetro de regularização m .

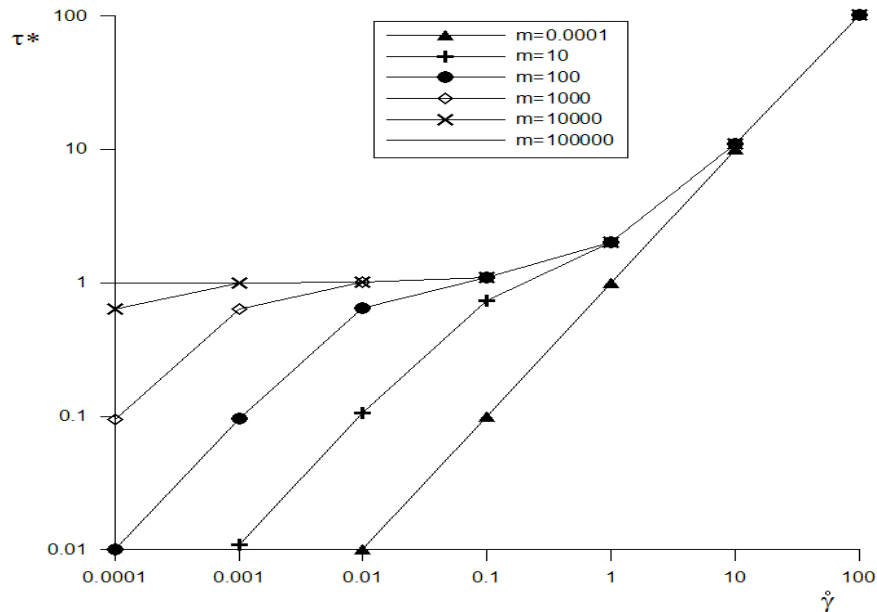


Figura 3.5. Curvas de escoamento para fluidos de Bingham-Papanastasiou, considerando $m=10^{-4}$ até $m=10^5$.

Pode-se observar, a partir da equação (3.19), que descreve o modelo de Bingham-Papanastasiou, que, para valores elevados de m , tende-se, assintoticamente, ao modelo clássico de Bingham, por outro lado, quando o parâmetro regularizador m tende a zero, a equação de Bingham-Papanastasiou fica reduzida ao modelo linear para fluidos newtonianos. Analogamente, a figura 3.8, obtida a partir da equação (3.20), mostra a variação da viscosidade adimensionalizada ($\eta^*=\eta/\eta_0$, sendo η_0 a viscosidade correspondente à tensão τ_0) com a taxa de cisalhamento. A figura permite concluir que, quando $m \rightarrow 0$, $\eta(\dot{\gamma})$ tende a uma função constante para fluidos newtonianos, enquanto para $m \rightarrow \infty$, $\eta(\dot{\gamma})$ tende à viscosidade de cisalhamento do modelo clássico de Bingham.

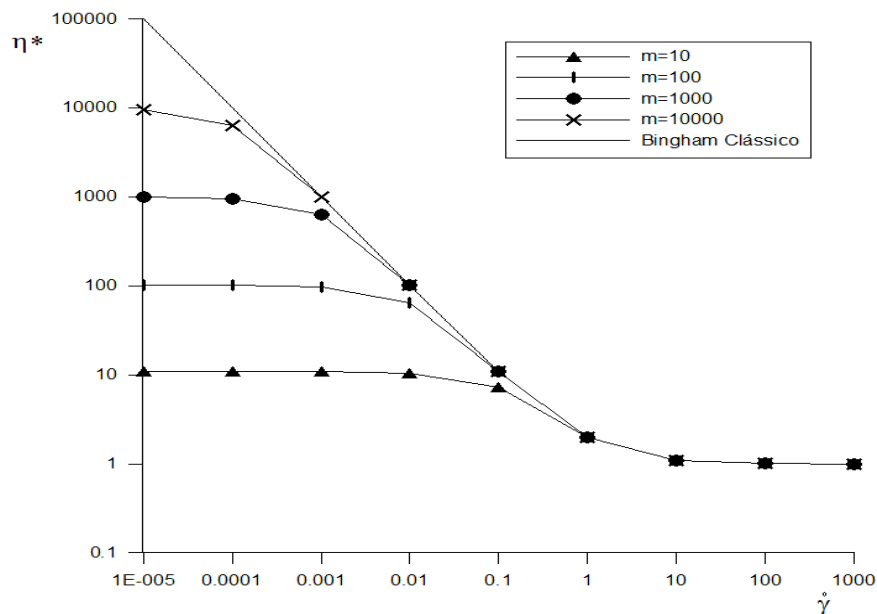


Figura 3.6. Variação da viscosidade com a taxa de cisalhamento para fluidos de Bingham-Papanastasiou, considerando $m=10$ até $m=10^4$.

Uma discussão detalhada acerca da influência dos parâmetros de regularização na topologia da superfície de escoamento foi feita por Liu et al. (2002). Empregando o clássico escoamento em torno de uma esfera sólida, os autores compararam e analisaram duas abordagens diferentes de regularização para o modelo de Bingham, a saber: uma variação da equação introduzida por Bercovier e Engelman (1980) e a equação de Papanastasiou (1987). Liu et al. (2002) observaram que as duas metodologias produzem resultados qualitativamente similares para a topologia das superfícies de escoamento, porém, verificaram diferenças quantitativas tanto nas superfícies de escoamento quanto no coeficiente de arraste. Os autores verificaram que, para valores pequenos do parâmetro de regularização, foram observadas duas regiões interiores não escoadas, na região usualmente denominada polar e na usualmente denominada equador. No caso limite da equação de Bingham – quando o

parâmetro de regularização tende a zero – estas duas regiões interiores não escoadas aumentam de tamanho, mas no entanto, segundo os autores, não é possível determinar com certeza (devido a restrições computacionais) o comportamento limite da superfície de escoamento.

Capítulo 4

Aproximação de Elementos Finitos

4.1. Introdução

Os princípios básicos do método de elementos finitos para a solução de problemas de valor de contorno são o estabelecimento de uma formulação variacional para o problema investigado, que é construída a partir do produto interno entre as equações que caracterizam o problema forte (as equações de balanço, combinadas às hipóteses constitutivas, satisfazendo as condições de contorno) e as funções de aproximação selecionadas ao longo de todo o domínio do problema. A partir da formulação variacional, constrói-se uma solução aproximada das equações variacionais empregando funções de interpolação de elementos finitos, ou seja funções teste, que no problema tratado neste trabalho são dadas por: $(\mathcal{S}^h, \mathcal{V}^h, q^h) \in \Sigma^h \times$

$V^h \times P^h$. O domínio do problema é particionado em elementos finitos não superpostos e as aproximações de elementos finitos para as variáveis primais são construídas como combinações lineares de funções de forma de suporte compacto conhecidas e graus de liberdade incógnitos – neste trabalho: $(\boldsymbol{\tau}\text{-}p\text{-}\mathbf{u})$, os quais serão determinados pela solução numérica do problema matricial associado.

Os problemas abordados são definidos em um domínio aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, sendo N o número de dimensões espaciais consideradas no problema, com fronteira Γ poligonal,

$$\begin{cases} \Gamma_G \cup \Gamma_h, \\ \Gamma_G \cap \Gamma_h = \emptyset, \quad \Gamma_g \neq \emptyset \end{cases} \quad (4.1)$$

onde Γ_g é a porção da fronteira Γ na qual são impostas as condições de contorno de Dirichlet (essenciais) e Γ_h a região na qual são prescritas as condições de contorno de Neumann (naturais).

Sobre o domínio fechado $\bar{\Omega}$ realiza-se uma partição Ω_h de elementos finitos, com domínio elementar Ω_k na forma:

$$\begin{cases} \bar{\Omega} = \cup_{K \in \mathcal{C}_h} \bar{\Omega}_K \\ \Omega_{K_1} \cap \Omega_{K_2} = \emptyset, \quad \forall K_1, K_2 \in \Omega_h \end{cases} \quad (4.2)$$

Assim, a aproximação de uma variável U por U^h , pertencente à discretização Ω_h , é então representada como uma expansão na forma:

$$U^h = \sum_{A=1}^{n+1} N_A(\mathbf{x}) d_A \quad (4.3)$$

onde N_A e d_A representam a função de base e o grau de liberdade associados ao ponto nodal global A da discretização Ω_h , respectivamente.

Para os espaços polinomiais, adota-se a notação:

$$R_m(K) = \begin{cases} P_m(K), & \text{para } K \text{ triângulo ou tetraedro,} \\ Q_m(K), & \text{para } K \text{ quadrilátero ou hexaedro} \end{cases} \quad (4.4)$$

onde $m \geq 0$ é o grau de interpolação dos elementos finitos dos tipos P_m e Q_m (Ciarlet, 1978).

4.2. Problema de Valor de Contorno

O problema forte é construído combinando-se as equações de conservação de massa e momentum linear, equações (2.12) e (2.14), respectivamente, supondo escoamento isocórico em regime laminar e permanente, e uma hipótese constitutiva para o tensor extra tensão $\boldsymbol{\tau}$ considerando um modelo de fluido newtoniano, ou newtoniano generalizado definida no capítulo 3, ou seja, o tensor tensão \mathbf{T} relaciona-se com a deformação do fluido através de um modelo GNL,

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \\ &= -p\mathbf{I} + 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}(\mathbf{u}) \quad \text{em } \Omega \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde p representa a pressão, $\eta(\dot{\gamma})$ a viscosidade, que é função da taxa de deformação e $\mathbf{D}(\mathbf{u})$ o tensor taxa de deformação.

A formulação do problema forte, considerando três campos $(\boldsymbol{\tau}, p, \mathbf{u})$ é dada pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \rho(\nabla \mathbf{u})\mathbf{u} + \nabla p - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} &= \rho \mathbf{f} && \text{em } \Omega \\ \boldsymbol{\tau} - 2\eta(\dot{\gamma})\mathbf{D}(\mathbf{u}) &= 0 && \text{em } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\ (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})\mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde ρ representa a massa específica do fluido, p a pressão, \mathbf{u} o campo de velocidades admissível, \mathbf{D} o tensor taxa de deformação, a força de corpo \mathbf{f} será dada pela aceleração da gravidade \mathbf{g} e \mathbf{t}_h representa a força de superfície. Além disso, $\eta(\dot{\gamma})$ é a função viscosidade, Ω representa o domínio interno, Γ_g a parte do contorno Γ onde condições de Dirichlet são impostas e Γ_h a parte do contorno Γ onde são impostas condições de Neumann.

4.3. Formulação de Galerkin

O método de Galerkin caracteriza-se por apresentar funções peso e teste pertencentes ao mesmo espaço de funções, nas aproximações por elementos finitos de um problema. Neste trabalho, que utiliza uma formulação em três campos, as funções solução – ou seja os graus de liberdade a serem determinados – são $\boldsymbol{\tau}^h$, \mathbf{u}^h e p^h , (tensor extra tensão, velocidade e pressão), enquanto as funções teste são \mathcal{S}^h , \mathcal{V}^h e q^h .

O método de elementos finitos emprega uma aproximação conforme que se baseia no fato dos subespaços de elementos finitos serem subconjuntos dos espaços funcionais, ou seja, os espaços de dimensão infinita empregados na formulação variacional são aproximados por subespaços de dimensão finita convenientes, por exemplo, os espaços funcionais dos campos de pressão, velocidade e tensor extra tensão virtuais, P , V , e Σ respectivamente, são aproximados pelos subespaços P^h , V^h , e Σ^h . Como os subespaços P^h , V^h , e Σ^h são subconjuntos dos espaços P , V , e Σ , pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
P^h \subset P & \quad (\text{ou seja, se } q^h \in P^h, \text{ então } q^h \in P) \\
V^h \subset V & \quad (\text{ou seja, se } \mathbf{v}^h \in P^h, \text{ então } \mathbf{v}^h \in V) \\
\Sigma^h \subset \Sigma & \quad (\text{ou seja, se } \mathbf{S}^h \in \Sigma^h, \text{ então } \mathbf{S}^h \in \Sigma)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

o índice h faz referência à discretização do domínio, Ω_h , parametrizada por um comprimento característico dos elementos h . A equação (4.7) define o que é conhecido em Teoria de Funções como uma *aproximação interna*, uma característica orgânica dos métodos de elementos finitos, diferentemente dos métodos de diferenças finitas os quais, ao invés de aproximarem os espaços das funções empregadas, aproximam suas derivadas.

Serão empregados os subespaços usuais da dinâmica dos fluidos para a aproximação dos campo de pressão (P^h), velocidade (V^h) e tensor extra tensão, Σ^h além de V_g^h : o subespaço para a aproximação dos campos de velocidade prescrita na fonteira Γ_g , definidos como:

$$P^h = \left\{ q \in C^0 \cap L_0^2(\Omega) \mid p|_{\Omega_K} \in R_l(\Omega_K), \Omega_K \in \Omega_h \right\} \tag{4.8}$$

$$V^h = \left\{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_{\Omega_K} \in R_k(\Omega)^N, \Omega_K \in \Omega_h \right\} \tag{4.9}$$

$$V_g^h = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N \mid \mathbf{v}|_{\Omega_K} \in R_k(\Omega_K)^N \times N, \Omega_K \in \Omega_h \right\} \tag{4.10}$$

$$\Sigma^h = \left\{ \mathbf{S} \in C^0(\Omega)^{N \times N} \cap L_2(\Omega)^{N \times N} \mid S_{ij} = S_{ji}, i, j = 1, N \mid S_K \in R_m(K)^{N \times N}, \Omega_K \in \Omega_h \right\} \tag{4.11}$$

onde R_k , R_l e R_m denotam, respectivamente, espaços polinomiais de grau k , l e m em Ω_K (Ciarlet, 1978).

Segundo Rektorys (1975), sobre os espaços de funções tem-se que: $C^0(\Omega)$ representa o espaço de funções contínuas, $L^2(\Omega)$ define o espaço de Hilbert de funções quadrado-integráveis sobre o domínio Ω , $L_0^2(\Omega)$ define o espaço de

funções quadrado-integráveis com média igual a zero sobre o domínio Ω , $H^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre o domínio Ω e $H_0^1(\Omega)$ o espaço de Sobolev de funções e primeiras derivadas quadrado-integráveis sobre Ω que se tornam zero em Γ_g .

A aproximação de elementos finitos das equações (4.6), portanto, é construída substituindo espaços de dimensão infinita por subespaços de dimensão finita (discretos) convenientes. Garantindo-se que, em dimensões finitas, tem-se que as as funções solução são aproximados por funções de base contidas nos sub-espaços de elementos finitos definidos pelas equações (4.8)-(4.11), pelas funções $\boldsymbol{\tau}^h$, \mathbf{u}^h e p^h , enquanto as funções teste serão aproximadas pelas funções \mathbf{S}^h , \mathbf{v}^h e q^h , definidas como:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\tau}^h(x) &= \sum_{i,j} \boldsymbol{\tau}_{ij}^h e_i \otimes e_j \rightarrow \boldsymbol{\tau}_{ij}^h(x) = \sum_{\hat{B}} \hat{N}_{\hat{B}} \boldsymbol{\tau}_{ij}^{\hat{B}} \\
 \mathbf{u}^h(x) &= \sum_j \mathbf{u}_j^h e_j \rightarrow u_j^h(x) = \sum_B N_B(x) u_j^B \\
 p^h(x) &= \sum_B N_B(x) p_B \\
 \mathbf{S}^h(x) &= \sum_{i,j} S_{ij}^h(x) e_i \otimes e_j \rightarrow S_{ij}^h(x) = \sum_A \hat{N}_{\hat{A}}(x) S_{ij}^{\hat{A}} \\
 \mathbf{v}^h(x) &= \sum_i v_i^h(x) e_j \rightarrow v_i^h(x) = \sum_A N_A(x) v_j^A \\
 q^h(x) &= \sum_{\hat{A}} N_{\hat{A}}(x) q_{\hat{A}}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Considerando os subespaços definidos pelas equações (4.8)-(4.11), pode-se construir a aproximação de Galerkin para o problema definido pela equação (4.6) como: *Achar a tripla $(\boldsymbol{\tau}^h, \mathbf{u}^h, p^h) \in \boldsymbol{\Sigma}^h \times \mathbf{V}^h, P^h$ tal que:*

$$B(\boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = F(\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \quad \forall (\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) \in \boldsymbol{\Sigma}^h \times \mathbf{V}^h \times P^h \tag{4.13}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
B(\boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = & \int_{\Omega} (2\eta(\dot{\gamma}))^{-1} \boldsymbol{\tau}^h \cdot \mathbf{S}^h d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{S}^h d\Omega \\
& \int_{\Omega} \rho(\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega \\
& - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega + \int_{\Omega} p^h \cdot \varepsilon q^h d\Omega
\end{aligned} \tag{4.14}$$

e

$$F(\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \tag{4.15}$$

onde \mathbf{S} , \mathbf{v} e q são campos de tensor extra tensão, velocidade e pressão virtuais e o parâmetro $\varepsilon \ll 1$.

Utilizando notação indicial, a o sistema (4.13)-(4.15) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \rho(\partial_{x_j} u_i^h) u_i^h v_i^h d\Omega + \int_{\Omega} \tau_{ij}^h \partial_{x_j} v_i^h d\Omega + \int_{\Omega} q^h \partial_{x_i} u_i^h d\Omega \\
& - \int_{\Omega} \partial_{x_i} u_i^h S_{ij}^h s \Omega + \int_{\Omega} (2\eta(\dot{\gamma}))^{-1} \tau_{ij}^h S_{ij}^h d\Omega - \int_{P^h} \varepsilon q^h d\Omega \\
= & \int_{\Omega} \rho g_i v_i^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_i v_i^h d\Gamma \quad \forall (S_{ij}^h, v_i^h, q^h) \in \boldsymbol{\Sigma}^h \times \mathbf{V}^h \times P^h
\end{aligned} \tag{4.16}$$

4.4. Dificuldades na Formulação de Galerkin para escoamentos Incompressíveis

A implementação da metodologia de Galerkin pode originar algumas patologias numéricas ao serem considerados escoamentos de interesse em Engenharia. O grande desenvolvimento de sua aplicação a problemas de análise estrutural elástica linear é justificado por sua representação gerar, em geral, operadores elípticos e simétricos. Já em problemas de escoamentos, o termo advectivo (presente sempre que o termo inercial da equação de movimento é levado em conta) origina um operador assimétrico, que provocará um comportamento oscilatório em todo o domínio

computacional, principalmente no caso de escoamentos advectivo-dominados (sujeitos a altos números de Reynolds). (Este comportamento ocorre tanto em problemas discretizados via método de Galerkin quanto em discretizações através de diferenças centrais (Brooks e Hughes, 1982; Patankar, 1980)). A assimetria do operador advectivo pode originar patologias numéricas como o travamento do campo de velocidades e oscilações espúrias no campo de pressão. Em geral, o refinamento de malha não é capaz de eliminar completamente estas oscilações.

No caso de escoamentos incompressíveis, o campo de pressão é computado como um multiplicador de Lagrange do campo de velocidade (associado à restrição de incompressibilidade do fluido), originando um problema misto em pressão e velocidade. Os resultados de Babuška e Brezzi (Babuška, 1973; Brezzi, 1974) mostraram que os subespaços de velocidade e pressão não poderiam ser escolhidos arbitrariamente.

Em linhas gerais, o teorema de Brezzi (1974) estabelece a unicidade de solução para o problema variacional, $(\mathbf{u}, p) \in H_1^0(\Omega)^N \times L_2^0(\Omega)$, desde que duas condições de estabilidade sejam satisfeitas: A primeira condição (C1), denotada por condição de **elipticidade-K** estabelece que existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$|2\eta \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega| \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_1^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}, \quad \text{onde,} \quad \forall q \in L_2^0(\Omega), \quad \text{tem-se}$$

$\mathbf{K} = \{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^N \mid \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} d\Omega = 0\}$ e os demais parâmetros da relação foram anteriormente definidos. A segunda condição, denotada por condição (C2) ou **condição de Babuška-Brezzi** (Babuška, 1971; Brezzi, 1974), estabelece que existe

uma constante $\beta > 0$ tal que
$$\sup_{\mathbf{v} \in H_0^1} \frac{|\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} d\Omega|}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq \beta \|q\|_0, \quad \forall q \in L_2^0(\Omega).$$

Uma versão equivalente do Teorema de Brezzi (Teorema de Brezzi discreto) é válida para o problema de Galerkin: Tomam-se aproximações conformes do problema contínuo, $V^h \subset H_0^1(\Omega)^N$ e $P^h \subset L_2^0(\Omega)$, com V^h e P^h gerados por polinômios constantes por partes. A versão equivalente é obtida substituindo-se \mathbf{u} , \mathbf{v} , p , q , V e P por suas formas discretizadas: \mathbf{u}^h , \mathbf{v}^h , p^h , q^h , V^h e P^h e, além disso, substitui-se \mathbf{K} por $\mathbf{K}^h \subset V^h$, onde, $\mathbf{K}^h = \{ \mathbf{v}^h \in V^h \mid \int_{\Omega} q^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega = 0 \}$, $\forall q^h \in P^h$. Como, em geral, $\mathbf{K}^h \subset \mathbf{K}$, as condições (C1) e (C2) devem ser verificadas para todas as combinações de V^h e P^h . Estas condições deixam claras as limitações do método de Galerkin, uma vez que, para uma ampla gama de problemas de escoamentos, as condições de estabilidade não são satisfeitas por combinações naturais – como interpolações de mesma ordem para velocidade e pressão. Estas funções não satisfazem as condições de estabilidade com α e β independentes de h .

É importante enfatizar que existe ainda outra dificuldade no método de Galerkin, no caso de formulações em três campos: a escolha dos subespaços de elementos finitos de tensão e de velocidade, que necessitariam ser compatíveis. Segundo Franca e Stenberg (1991), a continuidade do tensor extra de tensões também pode dificultar a estabilidade do problema.

A fim de contornar estas dificuldades foram propostas diversas estratégias, que podem ser classificadas em dois grupos: o primeiro grupo usa uma estratégia que mantém a formulação do método clássico de Galerkin e empregam elementos finitos complexos. O segundo grupo emprega estratégias, como aquela utilizada neste trabalho, que consistem no emprego de métodos estabilizados, construídos de forma a não necessitarem satisfazer *a priori* a condição de Babuška-Brezzi, nem a compatibilização dos subespaços de tensão extra e velocidade permitindo, assim,

empregar combinações de elementos finitos de igual ordem para a aproximação dos subespaços de tensão, velocidade e pressão.

4.5. Formulação de Galerkin Mínimos-Quadrados

Baseado nas definições dos subespaços de tensão, pressão e velocidade, equações (4.8)-(4.11), pode-se escrever uma formulação multicampos de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS), utilizando uma formulação proposta por Behr et al. (1993) para fluidos com viscosidade constante e, posteriormente empregada por Zinani e Frey (2008), considerando a função viscosidade dependente da taxa de deformação. A Formulação GLS para o problema definido pela equação (4.6), é expressa da seguinte maneira: Achar a tripla $(\boldsymbol{\tau}^h, \mathbf{u}^h, p^h) \in \boldsymbol{\Sigma}^h \times \mathbf{V}_g^h, P^h$ tal que:

$$B(\boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = F(\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \quad \forall (\mathbf{S}^h, \mathbf{v}^h, q^h) \in \boldsymbol{\Sigma}^h \times \mathbf{V}^h \times P^h \quad (4.17)$$

onde:

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{\tau}^h, p^h, \mathbf{u}^h; \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) = & \int_{\Omega} (2\eta(\dot{\gamma}))^{-1} \boldsymbol{\tau}^h \cdot \mathbf{S}^h d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \cdot \mathbf{S}^h d\Omega \\ & + \int_{\Omega} \rho(\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^h \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h q^h d\Omega + \varepsilon \int_{\Omega} p^h q^h d\Omega \\ + \delta(Re_k) \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^h \operatorname{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\Omega_K} & (\rho(\nabla \mathbf{u}^h) \mathbf{u}^h + \nabla p^h - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^h) \cdot \boldsymbol{\alpha}(Re_k) \\ & (\rho(\nabla \mathbf{v}^h) \mathbf{u}^h + \nabla q^h - \operatorname{div} \mathbf{S}^h) d\Omega \\ + 2\eta(\dot{\gamma}) \int_{\Omega} \left((2\eta(\dot{\gamma}))^{-1} \boldsymbol{\tau}^h - \mathbf{D}(\mathbf{u}^h) \right) \cdot \boldsymbol{\beta} \left((2\eta(\dot{\gamma}))^{-1} \mathbf{S}^h - \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) \right) & d\Omega \end{aligned} \quad (4.18)$$

e

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \\
+ \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\Omega} (\rho \mathbf{g}) \cdot \alpha(\text{Re}_K) (\rho (\nabla \mathbf{v}^h) \mathbf{u}^h + \nabla q^h - \text{div} \mathbf{S}^h) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde os parâmetros $\varepsilon \ll 1$ e $0 \leq \beta \leq 1$ foram utilizados conforme sugestão de Behr *et al.* (1993). Os parâmetros de estabilidade $\alpha(\text{Re}_K)$ e $\delta(\text{Re}_K)$ avaliados em nível de elemento, são dados como em Franca e Frey (1992):

$$\alpha(\text{Re}_K) = \frac{h_K}{2|\mathbf{u}|_p} \xi(\text{Re}_K) \tag{4.20}$$

$$\delta(\text{Re}_K) = \chi |\mathbf{u}|_p h_K \xi(\text{Re}_K) \tag{4.21}$$

$$\xi(\text{Re}_K) = \begin{cases} \text{Re}_K, & 0 \leq \text{Re}_K < 1 \\ 1, & \text{Re}_K \geq 1 \end{cases} \tag{4.22}$$

$$\text{Re}_K = \frac{m_k |\mathbf{u}|_p h_k}{4\eta(\dot{\gamma})} \tag{4.23}$$

$$m_k = \min\{1/3, 2C_k\} \tag{4.24}$$

$$C_k \sum_{K \in \Omega^h} h_K^2 \|\text{div} \mathbf{D}(\mathbf{v})\|_{0,K} \leq \|\mathbf{D}(\mathbf{v})\|_0^2, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{V}^h \tag{4.25}$$

com h_K representando o tamanho da malha, χ uma constante escalar positiva, o parâmetro m_k é proveniente da análise de erro da formulação GLS introduzida em Franca e Frey (1992) e $|\mathbf{u}|_p$ a norma p do \mathbb{R}^N :

$$|\mathbf{u}|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^N |u_i|^p \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \max_{i=1, N} |u_i|, & p = \infty \end{cases} \tag{4.26}$$

Na equação (4.18) os termos na terceira e quarta linhas representam os termos de mínimos quadrados provenientes da equação de movimento, enquanto o termo da quinta linha representa os termos de mínimos quadrados oriundos da equação

material. Maiores detalhes sobre os parâmetros definidos nas equações (4.20) a (4.26) podem ser encontrados em Franca e Frey (1992).

Observações:

1. Tomando os parâmetros de estabilidade α , β e δ iguais a zero nas formulações GLS definidas pelas equações (4.17)-(4.19), obtém-se novamente a aproximação clássica de Galerkin em três campos (equações (4.13)-(4.15)). Sua estabilidade perde a coercividade quando a viscosidade tende a zero, além de necessitar satisfazer tanto a condição de Babuška-Brezzi (Ciarlet, 1978) quanto a condição de compatibilidade entre as funções de aproximação de tensor extra de tensão e velocidade (Zinani e Frey, 2008). O teorema de Brezzi (Ciarlet, 1978) impõe, além da satisfação da condição de Babuška-Brezzi, que o problema discreto seja elíptico para toda velocidade pertencente ao subespaço \mathbf{K}_0^h ,

$$\mathbf{K}_0^h = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{V}^h \mid \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad q \in P^h \right\} \quad (4.27)$$

Como, geralmente, $\mathbf{K}_h^0 \neq \mathbf{K}^0$, apenas um número limitado de combinações de elementos irá satisfazê-las, criando assim uma séria limitação ao método de Galerkin. As combinações de elementos computacionalmente desejáveis como as de igual-ordem, ficariam descartadas.

2. A expressão normalmente usada do número de Reynolds de malha (Johnson, 1987) foi modificada incluindo o parâmetro m_k na equação (4.23), de maneira que se possibilita levar em conta também o grau de interpolação

empregado. Assim, as regiões advectivo-dominadas do escoamento ficam caracterizadas por $Re_K > 1$ e as difusivo-dominadas por $Re < 1$, independente do elemento considerado (Franca e Frey, 1992).

4.6. O Problema Simulado

Nesta seção, por conveniência, apresenta-se a formulação multicampos em termos de tensor extra de tensões, pressão e velocidade para um escoamento em regime permanente de um fluido de Bingham-Papanastasiou (fluido de Bingham com a hipótese regularizadora de Papanastasiou (1987) para a viscosidade). Esta formulação é obtida combinando as equações de balanço de massa (equação (2.12)) e momentum linear (equação (2.14)) com a hipótese constitutiva dada pela equação (3.20) e incorporando condições de contorno apropriadas para velocidade e tensor extra tensão:

$$\begin{aligned}
 \rho (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{u} + \nabla p - \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} &= \rho \mathbf{g} && \text{em } \Omega \\
 \boldsymbol{\tau} - 2 \left(\eta_p + \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(-m \dot{\gamma})] \right) \mathbf{D}(\mathbf{u}) &= 0 && \text{em } \Omega \\
 \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{em } \Omega \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}_g && \text{sobre } \Gamma_g \\
 [\boldsymbol{\tau} - p \mathbf{I}] \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h && \text{sobre } \Gamma_h
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

onde ρ , \mathbf{u} , $\boldsymbol{\tau}$, τ_0 , η_p , $\dot{\gamma}$ e m foram previamente definidos, p é a pressão hidrostática, \mathbf{g} é a força de corpo por unidade de massa e \mathbf{t}_h é o vetor tensão de Cauchy. Além disso, Γ_g é a porção do contorno da região de escoamento Ω na qual a condição de contorno de Dirichlet para a velocidade \mathbf{u}_g é imposta e Γ_h é a parte da fronteira de Ω na qual a condição de contorno de Neumann \mathbf{t}_h é imposta.

Neste ponto é interessante expressar o sistema (4.28) de forma adimensional.

Isto pode ser feito definindo as seguintes variáveis adimensionais:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \frac{\mathbf{u}}{u_i} & \mathbf{x}^* &= \frac{\mathbf{x}}{H} & p^* &= \frac{p}{\rho u_i^2} & \boldsymbol{\tau}^* &= \frac{\boldsymbol{\tau}}{\tau_0} & \mathbf{g}^* &= \frac{H}{u_i^2} \mathbf{g} \\ \dot{\gamma}^* &= \frac{H}{u_i} \dot{\gamma} & m^* &= \frac{u_i}{H} m & \mathbf{n}^* &= \frac{\mathbf{n}}{H^2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde o índice * indica a variável adimensionalizada e u_i representa uma velocidade característica, H , um comprimento característico, ρu_i^2 uma pressão característica e τ_0 uma tensão característica: a tensão limite de escoamento.

Substituindo-se as variáveis \mathbf{u}^* , p^* , $\boldsymbol{\tau}^*$, e \mathbf{g}^* na equação de movimento, tem-se:

$$\frac{\rho u_i^2}{H} [(\nabla \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* + \nabla p^* - \frac{\tau_0}{\rho u_i^2} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}^* - \mathbf{g}^*] = 0 \quad (4.30)$$

onde

$$\frac{\tau_0}{\rho u_i^2} = \frac{\tau_0 H}{\eta_p u_i} \frac{\eta_p}{\rho u_i H} = \frac{\operatorname{Bn}}{\operatorname{Re}} \quad (4.31)$$

uma vez que os números de Bingham (relação entre tensões de escoamento e tensões de cisalhamento) e de Reynolds (relação entre forças de inércia e forças viscosas) podem ser definidos como:

$$\operatorname{Bn} = \frac{\tau_0 H}{\eta_p u_i} \quad , \quad (4.32)$$

$$\operatorname{Re} = \frac{\rho u_i H}{\eta_p} \quad (4.33)$$

sendo η_p a viscosidade plástica do fluido de Bingham, e ρ sua densidade.

No caso da equação material, substituem-se as variáveis $\boldsymbol{\tau}^*$, \mathbf{u}^* , m^* e $\dot{\gamma}^*$:

$$\begin{aligned} \frac{\tau^* \tau_0}{\eta_p} - 2 \left(\frac{\eta_p}{\eta_p} + \frac{\tau_0 H}{\eta_p u_i \dot{\gamma}^*} [1 - \exp(-\frac{m^* H u_i \dot{\gamma}^*}{u_i H})] \right) \frac{u_i}{H} \mathbf{D}(\mathbf{u}^*) &= 0 \\ \tau^* - 2 \left(1 + \frac{\text{Bn}}{\dot{\gamma}^*} [1 - \exp(-m^* \dot{\gamma}^*)] \right) \frac{1}{\text{Bn}} \mathbf{D}(\mathbf{u}^*) &= 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

A equação da continuidade é adimensionalizada como:

$$\frac{u_i}{H} \text{div } \mathbf{u}^* = 0 \quad \text{div } \mathbf{u}^* = 0 \quad , \quad (4.35)$$

e as condições de contorno:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* u_i = \mathbf{u}_g \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{u}_g}{u_i} = \mathbf{u}_g^* \quad \rightarrow \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u}_g^* \\ \left[\frac{\tau^* \tau_0}{\tau_0} - \frac{p^* \rho u_i^2}{\tau_0} \mathbf{I} \right] H^2 \mathbf{n}^* = \frac{1}{\tau_0} \mathbf{t}_h \quad \rightarrow \quad \frac{\mathbf{t}_h}{\rho u_i^2 H^2} = \mathbf{t}_h^* \\ \text{Logo} \quad \left[\tau^* - \frac{\text{Re}}{\text{Bn}} p^* \mathbf{I} \right] \mathbf{n}^* = \frac{\text{Re}}{\text{Bn}} \mathbf{t}_h^* \end{aligned} \quad (4.36)$$

Resumindo, o sistema (4.28) pode ser escrito de forma adimensionalizada como:

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{u}^*) \mathbf{u}^* + \nabla p^* - \frac{\text{Bn}}{\text{Re}} \text{div } \tau^* &= \mathbf{g}^* && \text{em } \Omega \\ \tau^* - 2 \left(1 + \frac{\text{Bn}}{\dot{\gamma}^*} [1 - \exp(-m^* \dot{\gamma}^*)] \right) \frac{1}{\text{Bn}} \mathbf{D}(\mathbf{u}^*) &= 0 && \text{em } \Omega \\ \text{div } \mathbf{u}^* &= 0 && \text{em } \Omega \\ \mathbf{u}^* &= \mathbf{u}_g^* && \text{sobre } \Gamma_g \\ \left[\tau^* - \frac{\text{Re}}{\text{Bn}} p^* \mathbf{I} \right] \mathbf{n} &= \mathbf{t}_h^* \frac{\text{Re}}{\text{Bn}} && \text{sobre } \Gamma_h \end{aligned} \quad (4.37)$$

A Formulação GLS multicampos para o problema de valor de contorno definido pela equação (4.37), pode ser expressa como: *Achar a tripla*

$(\tau^{*h}, \mathbf{u}^{*h}, p^{*h}) \in \Sigma^h \times \mathbf{V}_g^h, P^h$ tal que:

$$\begin{aligned} B(\tau^{*h}, p^{*h}, \mathbf{u}^{*h}; \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) &= F(\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) \\ \forall (\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) &\in \Sigma^h \times P^h \times \mathbf{V}^h \end{aligned} \quad (4.38)$$

onde:

$$\begin{aligned}
B(\boldsymbol{\tau}^{*h}, p^{*h}, \mathbf{u}^{*h}; \mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) &= \int_{\Omega} \left(\frac{2}{\text{Bn}} \left(1 + \frac{\text{Bn}}{\dot{\gamma}^*} [1 - \exp(-m^* \dot{\gamma}^*)] \right) \right)^{-1} \boldsymbol{\tau}^{*h} \cdot \mathbf{S}^h d\Omega \\
&- \int_{\Omega} \mathbf{D}(\mathbf{u}^{*h}) \cdot \mathbf{S}^h d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}^{*h}) \mathbf{u}^{*h} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \frac{\text{Bn}}{\text{Re}} \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau}^{*h} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) d\Omega \\
&- \int_{\Omega} p^{*h} \text{div} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}^{*h} q^h d\Omega + \varepsilon \int_{\Omega} p^{*h} q^h d\Omega \\
&+ \delta (Re_k) \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{u}^{*h} \text{div} \mathbf{v}^h d\Omega \\
&+ \sum_{K \in \mathcal{C}_h} \int_{\Omega_K} (\rho (\nabla \mathbf{u}^{*h}) \mathbf{u}^{*h} + \nabla p^{*h} - \frac{\text{Bn}}{\text{Re}} \text{div} \boldsymbol{\tau}^{*h}) \cdot \boldsymbol{\alpha} (Re_k) \\
&((\nabla \mathbf{v}^h) \mathbf{u}^{*h} + \nabla q^h - \frac{\text{Bn}}{\text{Re}} \text{div} \mathbf{S}^h) d\Omega + \left(\frac{2}{\text{Bn}} \left(1 + \frac{\text{Bn}}{\dot{\gamma}^*} [1 - \exp(-m^* \dot{\gamma}^*)] \right) \right) \times \\
&\times \int_{\Omega} \left(\left(\frac{2}{\text{Bn}} \left(1 + \frac{\text{Bn}}{\dot{\gamma}^*} [1 - \exp(-m^* \dot{\gamma}^*)] \right) \right)^{-1} \boldsymbol{\tau}^{*h} - \mathbf{D}(\mathbf{u}^{*h}) \right) \\
&\cdot \beta \left(\left(\frac{2}{\text{Bn}} \left(1 + \frac{\text{Bn}}{\dot{\gamma}^*} [1 - \exp(-m^* \dot{\gamma}^*)] \right) \right)^{-1} \mathbf{S}^h - \mathbf{D}(\mathbf{v}^h) \right) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.39}$$

e:

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{S}^h, q^h, \mathbf{v}^h) &= \int_{\Omega} \mathbf{g}^{*h} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega + \frac{\text{Re}}{\text{Bn}} \int_{\Gamma_h} \mathbf{t}_h^{*h} \cdot \mathbf{v}^h d\Gamma \\
&+ \sum_{K \in \Omega^h} \int_{\Omega_K} \mathbf{g}^{*h} \cdot (\boldsymbol{\alpha} (Re_K) ((\nabla \mathbf{v}^h) \mathbf{u}^{*h} + \nabla q^h - \frac{\text{Bn}}{\text{Re}} \text{div} \mathbf{S}^h)) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.40}$$

4.7. Estratégia de solução

Substituindo as funções de forma definidas em (4.12) na formulação GLS dada pelas equações (4.38)-(4.40), obtém-se a seguinte equação semi-discreta, por conveniência substituindo $\boldsymbol{\tau}^*$, \mathbf{u}^* , e p^* por $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{u} , e p :

$$\begin{aligned}
&[(1 + \beta) \mathbf{E}(\eta(\dot{\gamma})) + (1 - \beta) \mathbf{H} + \mathbf{E}_{\boldsymbol{\alpha}}(\eta(\dot{\gamma}), \mathbf{u}) \boldsymbol{\tau}] \\
&+ [\mathbf{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{N}_{\boldsymbol{\alpha}}(\eta(\dot{\gamma}), \mathbf{u}) + \beta \mathbf{K} - (1 + \beta) \mathbf{H}^T - \mathbf{G}^T + \mathbf{M}] \mathbf{u} \\
&+ [\mathbf{G} + \mathbf{G}_{\boldsymbol{\alpha}}(\eta(\dot{\gamma}), \mathbf{u}) + \mathbf{P}] \mathbf{p} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\boldsymbol{\alpha}}(\eta(\dot{\gamma}), \mathbf{u})
\end{aligned} \tag{4.41}$$

onde $[\mathbf{H}]$ e $[\mathbf{H}^T]$ são as matrizes que representam o acoplamento entre $\boldsymbol{\tau}$ e \mathbf{u} , $[\mathbf{E}]$ é a matriz relacionada ao tensor extra de tensões $\boldsymbol{\tau}$, $[\mathbf{N}]$ é a matriz do termo advectivo, $[\mathbf{K}]$ a do termos difusivo, $[\mathbf{G}]$ é a matriz do termo de pressão, $[\mathbf{G}^T]$ a matriz do termo da equação de continuidade e $[\mathbf{F}]$ a matriz do termo de forças de corpo. As matrizes com índice α , a saber: $[\mathbf{E}_\alpha]$, $[\mathbf{N}_\alpha]$, $[\mathbf{G}_\alpha]$ e $[\mathbf{F}_\alpha]$ são provenientes dos termos de mínimos quadrados, enquanto $[\mathbf{M}]$ representa a matriz do termo δ e $[\mathbf{P}]$ aquela referente ao termo ε .

A equação (4.41) pode ser escrita na forma residual:

$$\mathbf{R}(\mathbf{U})=0 \quad (4.42)$$

sendo \mathbf{U} o vetor dos graus de liberdade de $\boldsymbol{\tau}$, \mathbf{u} e p , que, no caso de um problema plano bidimensional é representado por:

$$\mathbf{U}=[\tau_{12}, \tau_{11}, \tau_{22}, u_1, u_2, p]^T \quad (4.43)$$

e $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\mathbf{U})= & [(1+\beta)\mathbf{E}(\eta(\dot{\gamma}))+(1-\beta)\mathbf{H}+\mathbf{E}_\alpha(\eta(\dot{\gamma}), \mathbf{u})\boldsymbol{\tau}] \\ & +[\mathbf{N}(\mathbf{u})+\mathbf{N}_\alpha(\eta(\dot{\gamma}), \mathbf{u})+\beta\mathbf{K}-(1+\beta)\mathbf{H}^T-\mathbf{G}^T+\mathbf{M}]\mathbf{u} \\ & +[\mathbf{G}+\mathbf{G}_\alpha(\eta(\dot{\gamma}), \mathbf{u})+\mathbf{P}]p-\mathbf{F}-\mathbf{F}_\alpha(\eta(\dot{\gamma}), \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

A solução do sistema (4.42)-(4.44), foi implementada através de um método quasi-Newton (Dahlquist e Bjorck, 1969) no qual a matriz jacobiana numa iteração genérica k é dada por

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}^k)=\left.\frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}}\right|_{\mathbf{U}^k} \quad (4.45)$$

O algoritmo de solução abaixo (Zinani e Frey, 2008) descreve o procedimento numérico:

ALGORITMO

- I. Estime o vetor \mathbf{U}^0 e escolha o número de iterações m para atualizar a matriz jacobiana $\mathbf{J}(\mathbf{U})$.
- II. Faça $k=0$, $j=0$ e a tolerância $\epsilon=10^{-7}$.
- III. Se $k - \text{int}(k/m) \times k = 0$, então $j=k$.
- IV. Resolver o sistema de equações para calcular o vetor incremental A_{k+1}^h :

$$\mathbf{J}(\mathbf{U}^k) A^{k+1} = -\mathbf{R}(\mathbf{U}^k) \quad (4.46)$$

no qual $\mathbf{R}(\mathbf{U})$ é dado pela equação (4.44) e $\mathbf{J}(\mathbf{U})$ pela equação (4.45).

- V. Calcule o vetor \mathbf{U}^{k+1} :

$$\mathbf{U}^{k+1} = \mathbf{U}^k + A^{k+1} \quad (4.47)$$

- VI. Calcule $\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^k)\|_\infty$. Se $\|\mathbf{R}(\mathbf{U}^k)\|_\infty > \epsilon$ então faça $k=k+1$ e volte ao passo III; caso contrário, armazene a solução \mathbf{U}^{k+1} e saia do algoritmo.

A estratégia de solução – um método de quasi-newton incremental, congela a matriz jacobiana apresentada na equação (4.45), a qual é atualizada apenas a cada duas ou três iterações. A característica incremental do método consiste em empregar uma estratégia do tipo continuação para as não linearidades. Desta forma, a aproximação de escoamentos altamente viscoplásticos e com elevada inércia é atingida empregando a solução obtida para um problema com menor viscoplasticidade ou sem inércia como dado de entrada para um problema com viscoplasticidade ou inércia maior. Por exemplo, emprega-se a solução obtida para $Bn=0.2$ e $Re=0$ como dado de entrada para o problema considerando $Bn=2$ e $Re=0$ e assim, sucessivamente,

até atingir $Bn=100$. Analogamente, emprega-se a solução de um escoamento sem inércia ($Re=0$) e um determinado valor do número de Bingham como dado de entrada para a solução de um escoamento com $Re=1$, e assim, sucessivamente, até atingir $Bn=50$.

Observação: Os elementos finitos empregados neste trabalho são do tipo quadrangular bilinear (denotados, no caso de três campos, por Q1/Q1/Q1). As coordenadas locais de um ponto $\xi=(\xi,\eta)^T$ no quadrado bi-unitário são relacionadas às coordenadas do ponto $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$ em Ω^e através de mapeamentos da forma $x_1(\xi, \eta)=\sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta)x_{1_a}^e$ e $x_2(\xi, \eta)=\sum_{a=1}^4 N_a(\xi, \eta)x_{2_a}^e$, como mostrado na figura 4.1.

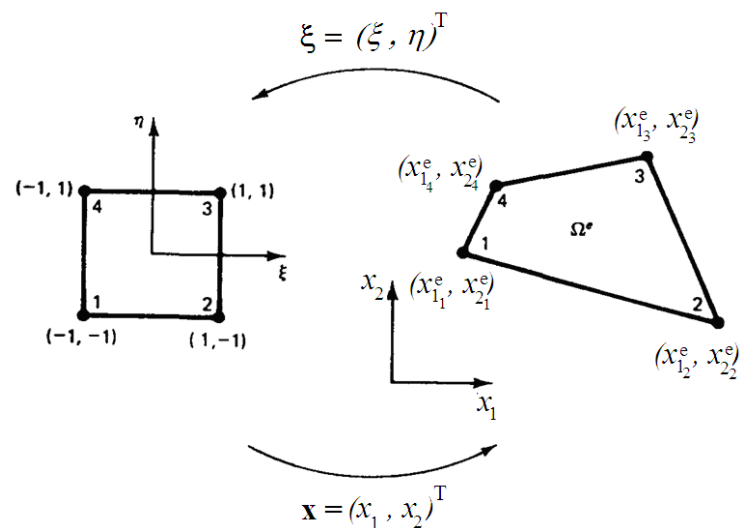


Figura 4.1. Mapeamento do domínio do elemento e ordenamento local dos nós (Hughes, 1987).

As funções de forma bilineares locais (N_a) do elemento Q1 são construídas de modo a valerem um nos pontos nodais a elas associados e zero no restante do domínio, como mostrado na figura 4.2, que também mostra as funções de forma bilineares globais (N_A) (Hughes, 1987). A determinação das funções de base N_a é feita a partir das expansões bilineares $x_1(\xi, \eta) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \xi \eta$ e $x_2(\xi, \eta) = \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \xi \eta$, sendo α e β os parâmetros a serem determinados, supondo que as expansões bilineares satisfaçam, respectivamente, as condições: $x_1(\xi_a, \eta_a) = x_{1_a}^e$ e $x_2(\xi_a, \eta_a) = x_{2_a}^e$, onde o par (ξ_a, η_a) é definido no quadrado à esquerda dos pontos $\xi = (\xi, \eta)^T$ apresentados na figura 4.1.

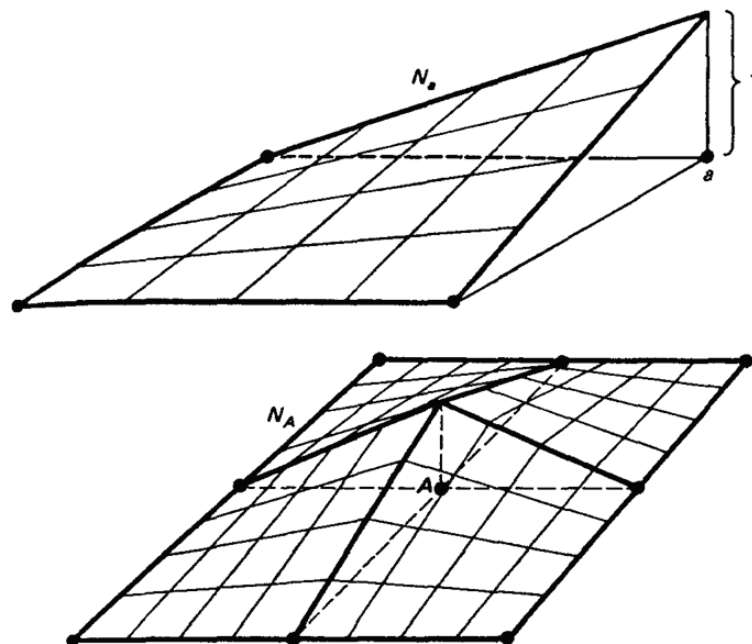


Figura 4.2. Funções de forma bilineares locais (N_a) e globais (N_A) (Hughes, 1987).

Capítulo 5

Resultados Numéricos

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos a partir da formulação multicampos utilizado o método de Galerkin Mínimos-Quadrados (GLS) definida no capítulo anterior, aplicada a fluidos de Bingham regularizados pela aproximação de Papanastasiou (1987), escoando através de uma expansão abrupta, mostrada na figura 5.1. O problema matemático está descrito pela equação (4.37) e a formulação GLS empregada pelas equações (4.38)-(4.40). O domínio do fluido é descrito usando o sistema cartesiano em termos de coordenadas axial x_1 e transversal x_2 , com origem no centro do plano de expansão. Aproveitando a simetria da geometria, apenas metade do canal, com razão de aspecto 1:4, foi considerada na simulação. A fim de evitar efeitos de entrada e de saída, tanto o canal menor quanto o maior são suficientemente longos. A partir de uma altura do canal menor, H , foi considerado um comprimento de $15 H$

para este e $22,5 H$ para o canal maior. Na figura 5.1, também é definido o comprimento de recolamento, L_r .

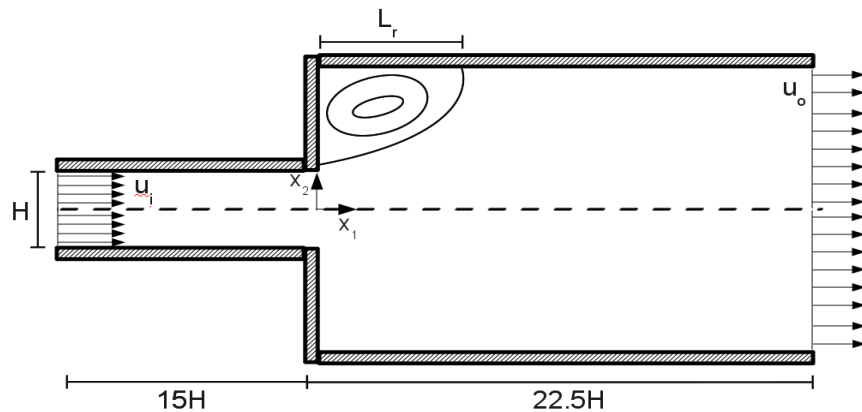


Figura 5.1. Escoamento através de uma expansão abrupta – definição da geometria estudada.

Foi efetuado um teste de independência de malha, comparando-se tanto o coeficiente de pressão de Euler, ($C_p = 2(p - p_o) / \rho u_i^2$, sendo p_o uma pressão de referência na saída do canal e u_i a velocidade de entrada) quanto a tensão de cisalhamento adimensional ($\tau^* = \tau / \tau_0$). O coeficiente de pressão foi plotado ao longo do canal (C_p versus $x_1^* = x_1 / H$) na linha de centro, enquanto a tensão de cisalhamento foi plotada para um escoamento desenvolvido no canal maior (τ^* versus $x_2^* = x_2 / H$), na posição $x_1^* = 10$. A comparação empregou três malhas distintas, a primeira, denotada por M1, composta por 10550 elementos finitos lagrangianos bilineares; a segunda malha, M2, com 19800 elementos e, finalmente, a terceira, M3, possuindo 20920 elementos. A comparação entre as referidas malhas é apresentada na figura 5.2. Os dados utilizados, apresentaram erros relativos de 0,09% a 2,84%, para a tensão de cisalhamento e de 0,09% a 2,76%, para o coeficiente de Euler.

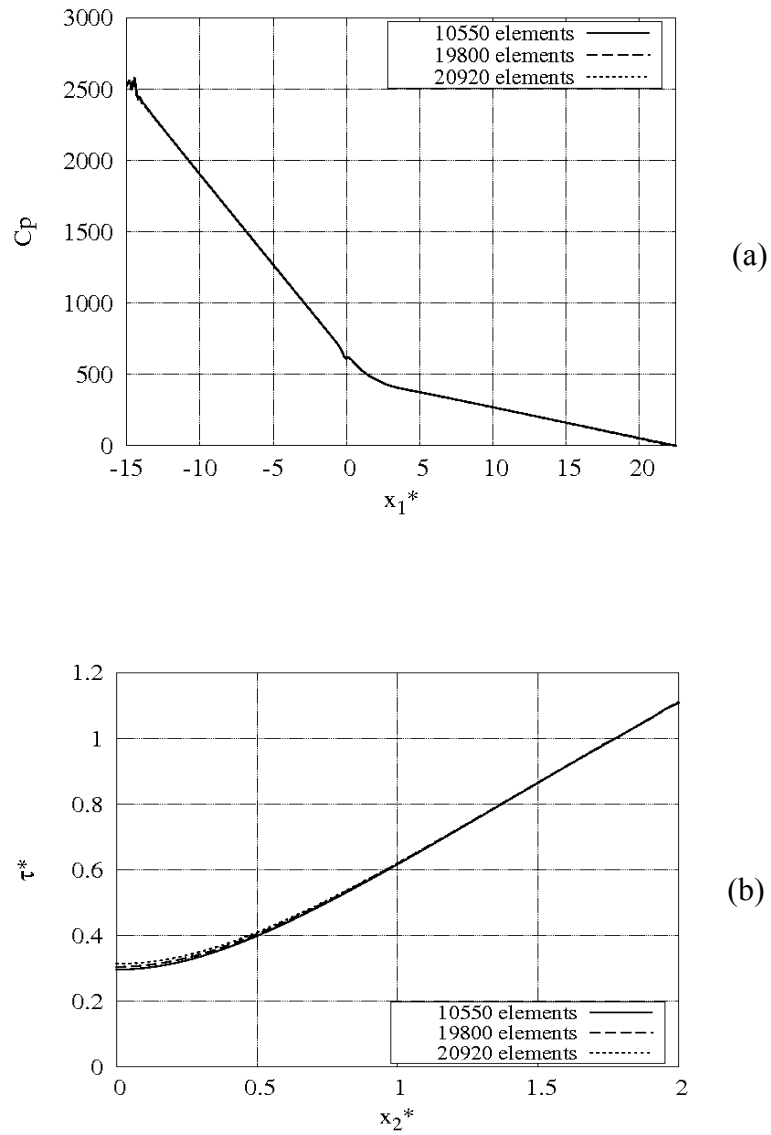


Figura 5.2 Procedimento de independência de malha considerando $Re=0$ e $Bn=20$ –

(i) para o domínio completo, considerando: (a) C_p e (b) τ^* .

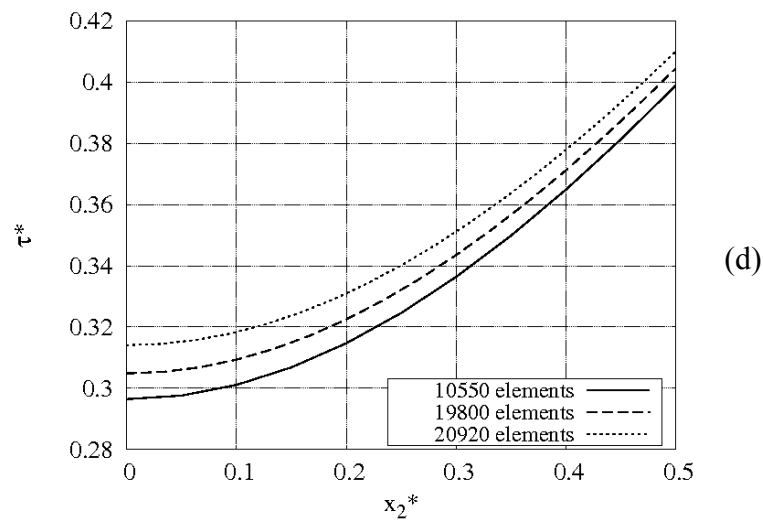
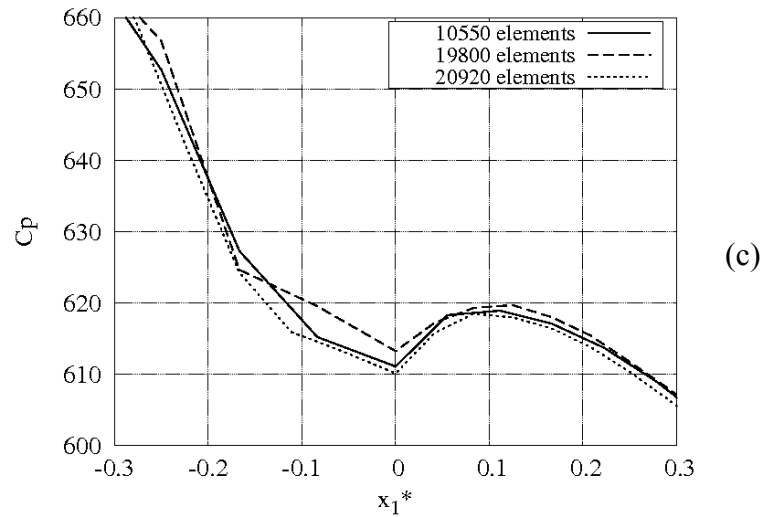


Figura 5.2 Procedimento de independência de malha considerando $Re=0$ e $Bn=20$ –

(ii) detalhes, para (c) C_p e (d) τ^* .

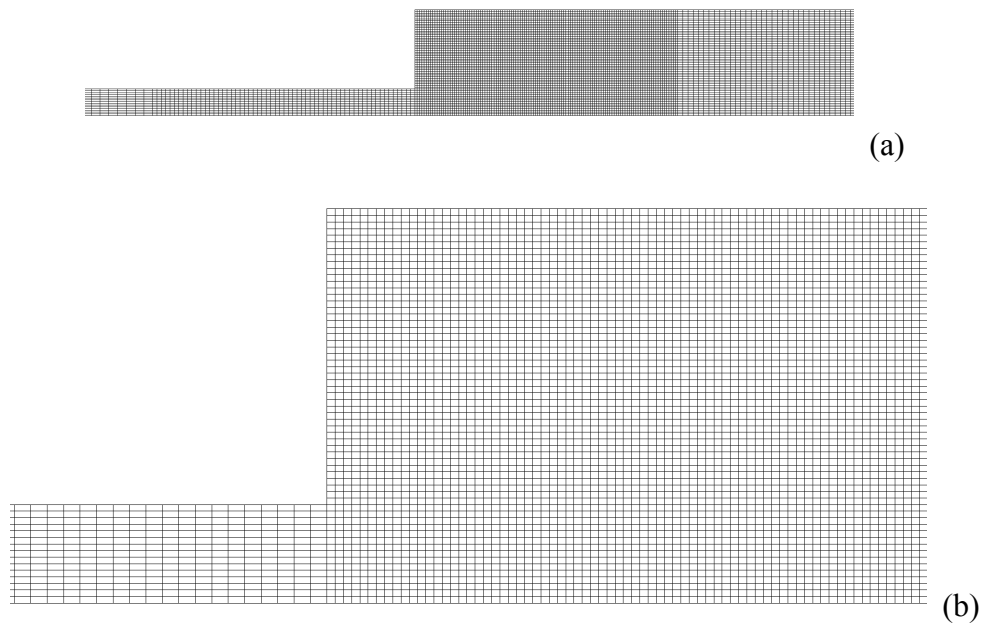


Figura 5.3. Escoamento através de uma expansão abrupta: (a) refinamento na região da expansão; (b): detalhe nas vizinhanças da expansão.

O procedimento para garantir a independência de malha, permitiu que fosse escolhida a malha M2 com 19800 elementos finitos lagrangianos bilineares e 121686 graus de liberdade. A figura 5.3a mostra a malha utilizada, apresentando um refinamento na região da expansão, enquanto a figura 5.3b apresenta um detalhe da malha nas vizinhanças da expansão.

Foram empregadas as condições de contorno usuais para escoamentos internos, a saber: condições de não deslizamento e impermeabilidade nas paredes do canal, condições de simetria $\partial_{x_2} u_1 = u_2 = \tau_{12} = 0$ na linha de centro do canal e perfis de velocidade constantes, tanto na entrada – cuja velocidade é dada por u_i – como na saída do canal – com velocidade $u_o = u_i/4$, devido à conservação de massa.

Todos os cálculos apresentados neste capítulo foram obtidos considerando o parâmetro de regularização de Papanastasiou adimensional m^* (introduzido na

equação (4.29)) igual a 1000, valor recomendado em diversos trabalhos que simulam escoamentos de fluidos viscoplásticos (ver, por exemplo, Mitsoulis e Huilgol (2004)).

A figura 5.4 investiga a influência da tensão limite de escoamento – a partir da definição de uma tensão de escoamento τ_0 – sobre a morfologia de regiões materiais onde há escoamento com presença de cisalhamento (representadas pelas zonas brancas nas figuras, nas quais $\tau^*=\tau/\tau_0>1$) e regiões ditas não escoadas – nas quais, ou não existe movimento, ou existe movimento de corpo rígido (zonas pretas, onde $\tau^*<1$). Neste caso, foi adotada a hipótese de escoamento lento ($Re\approx 0$). À medida que aumenta o número de Bingham, aumentam também, de forma monotônica, tanto as zonas sem escoamento (denominadas zonas mortas) quanto as zonas com movimento de corpo rígido, que se caracterizam por um escoamento do tipo pistonado, como pode ser observado nas figuras 4a até 4f. Apesar de ter sido usada hipótese regularizadora de Papanastasiou (1987), por conveniência, foi mantida a nomenclatura usual de fluidos de Bingham.

A morfologia das regiões escoadas e rígidas (zonas mortas e zonas com escoamento pistonado) em escoamentos de fluidos de Bingham está relacionada com a tensão de escoamento do material – ou seja, quanto maior o limite de escoamento, maiores são as regiões rígidas, ou, em outras palavras, torna-se mais fácil ocorrer a condição $\tau^*<1$ através do escoamento.

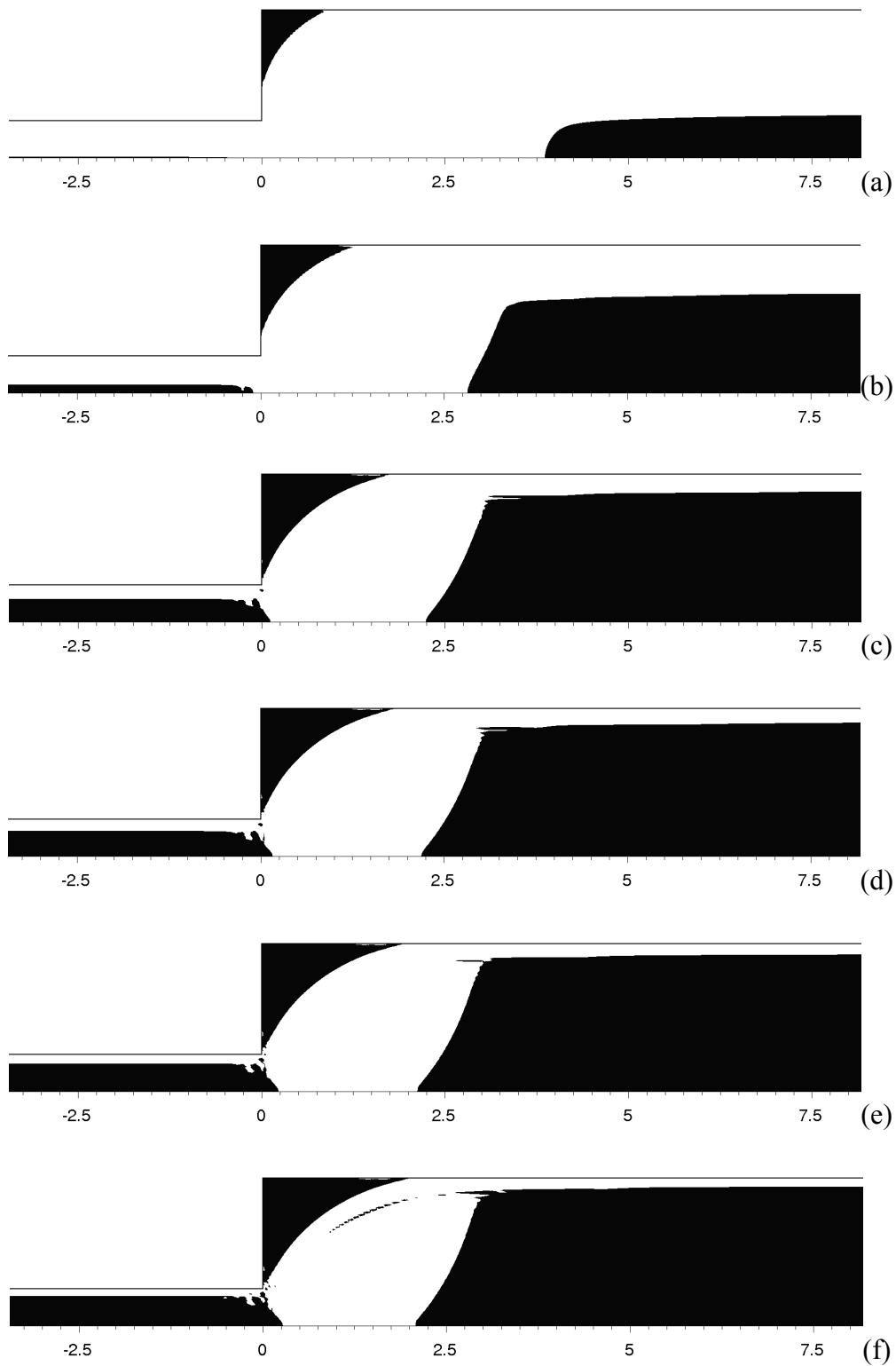


Figura 5.4. Regiões escoadas e não escoadas, considerando $Re=0$: (a) $Bn=0.2$; (b) $Bn=2$; (c) $Bn=20$; (d) $Bn=30$; (e) $Bn=60$; (f) $Bn=100$.

Algumas observações devem ser adicionadas a esta regra geral. Em primeiro lugar, para o escoamento menos viscoplástico ($Bn = 0,2$, apresentado na figura 4a), enquanto as regiões com movimento de corpo rígido (denotadas por regiões de escoamento pistonado) ainda são incipientes no canal menor, as regiões de escoamento pistonado em torno da linha de simetria do canal já estão bem desenvolvidas no canal maior. Este também apresenta zonas mortas (sem escoamento) na quina da expansão. Esse comportamento pode ser creditado a uma combinação de dois fatores, a saber, a taxa de deformação local mais elevada no canal menor e a baixa tensão de escoamento τ_0 apresentada pelo escoamento, para $Bn = 0,2$. Estes dois fatores combinados geram números de Bingham locais muito baixos ao longo do canal menor.

Em seguida, o crescimento monotônico das regiões não escoadas com o aumento do número de Bingham parece ser atenuado quando Bingham atinge o valor de 20 (figura 5.4c), após o qual tanto os escoamentos pistonados quanto as zonas mortas no canal maior são praticamente insensíveis ao aumento do número de Bingham. Nota-se que o mesmo não se aplica aos escoamentos pistonados no canal menor, que ainda experimentam algum aumento até mesmo para os escoamentos mais viscoplásticos (ver figuras 5.4e e 5.4f). Além disso, vale ressaltar que a distância entre o plano de expansão e o início do escoamento pistonado no canal maior diminui com o aumento do número de Bingham, somente para valores inferiores a $Bn=20$ (figura 4c); a partir destes valores, parece ser quase insensível ao crescimento do número de Bingham (figuras 5.4d e 5.4f) – pelos mesmos motivos já relatados nos comentários sobre a morfologia destas regiões.

A figura 5.5 mostra os resultados da influência do número de Bingham (já que o caso ilustrado foi obtido para um fluido de Herschel-Bulkley quando $n=1$,

reduzindo-se a um fluido de Bingham) nas superfícies de escoamento obtidos por Jay et al. (2001), considerando escoamentos lentos. Estes resultados consideraram um escoamento axissimétrico através de uma expansão abrupta 1:4 e foram obtidos utilizando o modelo de bi-viscosidade proposto por Lipscomb e Denn (1984) e um código comercial, tendo sido comprovados experimentalmente. Observa-se que a morfologia de regiões materiais escoadas e não escoadas apresentadas na figura 5.4 concorda qualitativamente com os resultados de Jay et al. (2001) apresentados na figura 5.5, ou seja: à medida que o número de Bingham cresce, aumentam as zonas mortas na quina da expansão e aumenta significativamente o tamanho do escoamento pistonado, tanto a montante quanto a jusante da contração. Além da variação análoga com a viscosidade das zonas mortas e das zonas de escoamento pistonado, também verificou-se que o início dos escoamentos pistonados no canal maior e o fim dos escoamentos pistonados no canal menor se aproximam à medida que o número de Bingham aumenta, nas duas figuras.

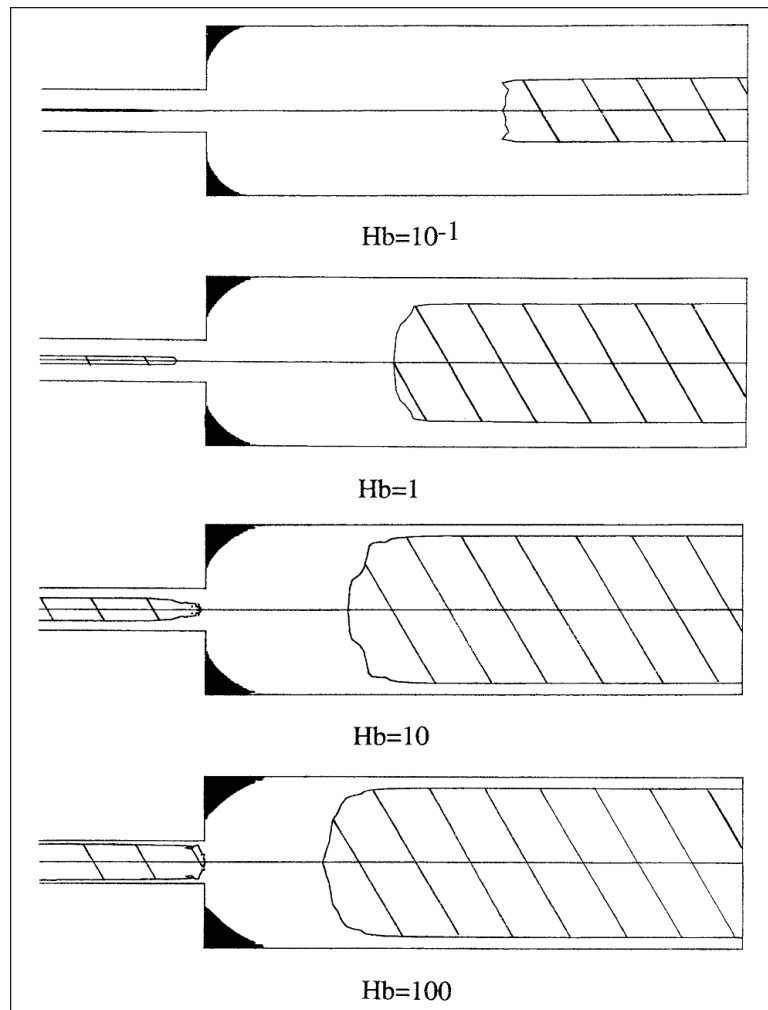


Figura 5.5. Influência do número de Bingham (denotado por Hb , pois $n=1$) nas superfícies de escoamento para $Re \approx 0$ (resultados de Jay et al., 2001).

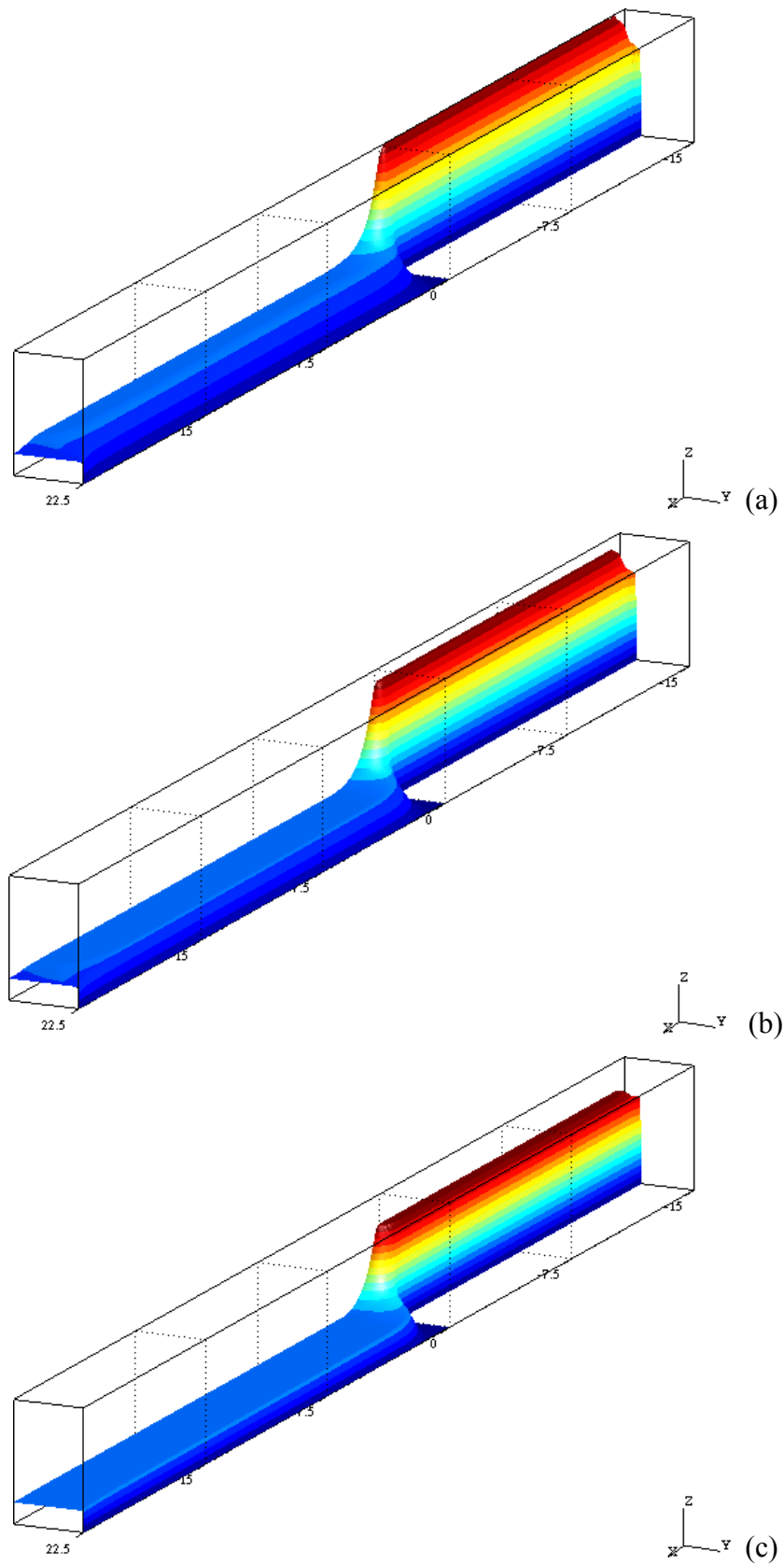


Figura 5.6. Elevação da velocidade axial adimensional ao longo do canal para $Re=0$:

(a) $Bn=0.2$; (b) $Bn=2$; (c) $Bn=20$.

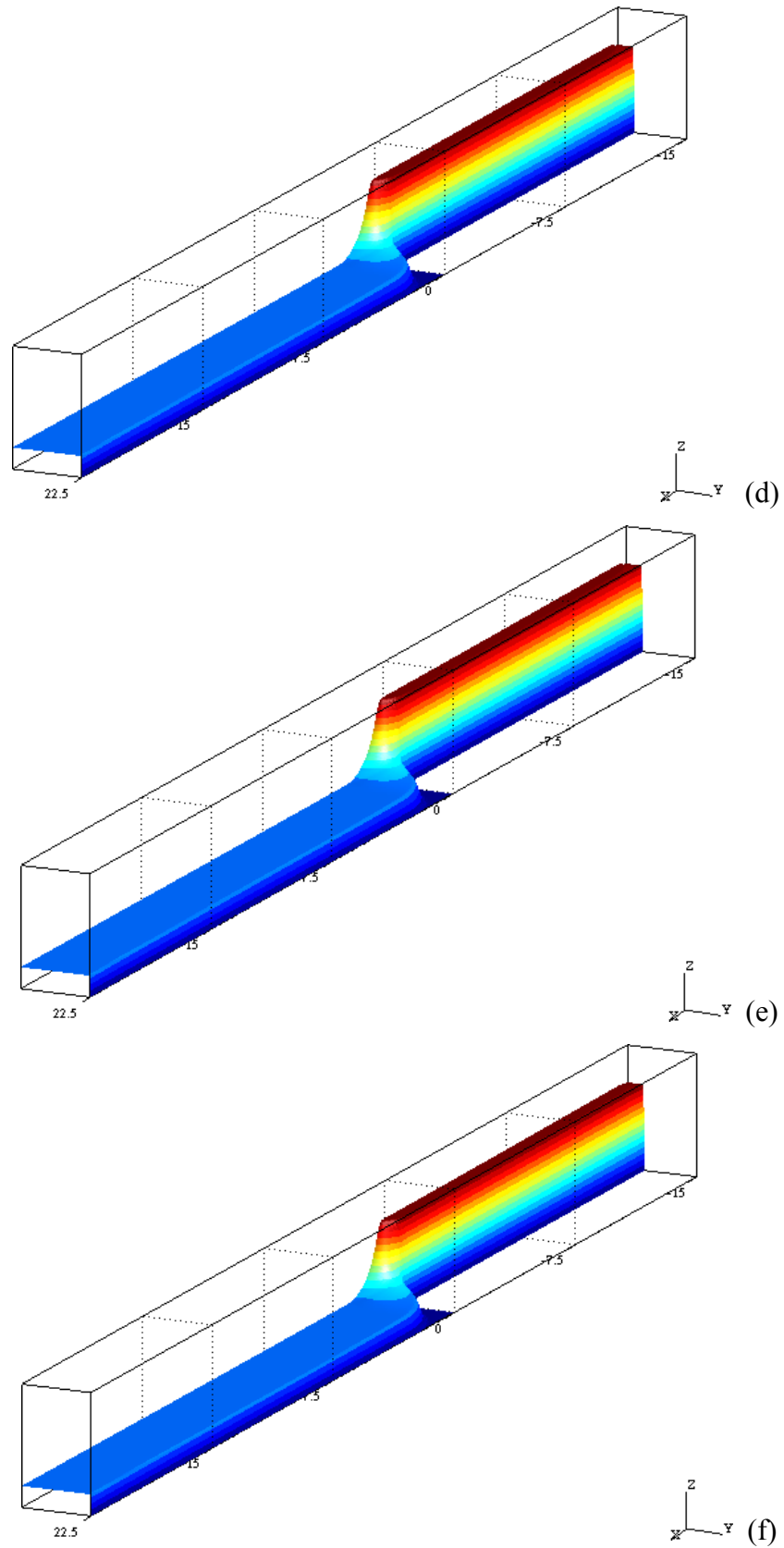


Figura 5.6. Elevação da velocidade axial adimensional ao longo do canal para $Re=0$:

(d) $Bn=30$; (e) $Bn=60$; (f) $Bn=100$.

A figura 5.6 apresenta gráficos de elevação para a velocidade axial adimensionalizada – denotada por $u_1^*=u_1/u_i$, sendo u_i a velocidade na entrada do canal menor – através do canal com expansão abrupta, considerando escoamento lento e número de Bingham variando desde $Bn=0,2$ até $Bn=100$. Os resultados destas figuras confirmam as observações anteriormente introduzidas a respeito das iso-regiões para τ^* . Em todas as figuras, os escoamentos pistonados em ambos os canais e as zonas mortas na quina da expansão estão claramente ilustrados, complementando, assim, o comportamento descrito na figura 5.4 – ou seja, o aumento das regiões não escoadas com o crescimento do número de Bingham.

Dois comentários relevantes podem, ainda, ser adicionados. O primeiro, a boa perspectiva fornecida por estes gráficos de elevação de velocidade axial, que permitem uma visualização clara do desenvolvimento da velocidade em escoamentos de fluidos viscoplásticos, propiciando a identificação de três importantes características do campo de velocidade. A primeira refere-se aos escoamentos menos viscoplásticos, ilustrados nas figuras 5.6a e 5.6b. Observa-se, claramente, o comprimento de entrada no canal menor, imposto pelos perfis de velocidade achatados na entrada e seu desenvolvimento subsequente, atingindo perfis viscoplásticos completamente desenvolvidos. A segunda característica é a suavidade dos escoamentos pistonados e suas arestas agudas para situações altamente viscoplásticas, como aquelas mostradas nas figuras 5.6c até 5.6f. A terceira é o forte decaimento sofrido pela velocidade máxima no canal maior, devido à conservação de massa do escoamento.

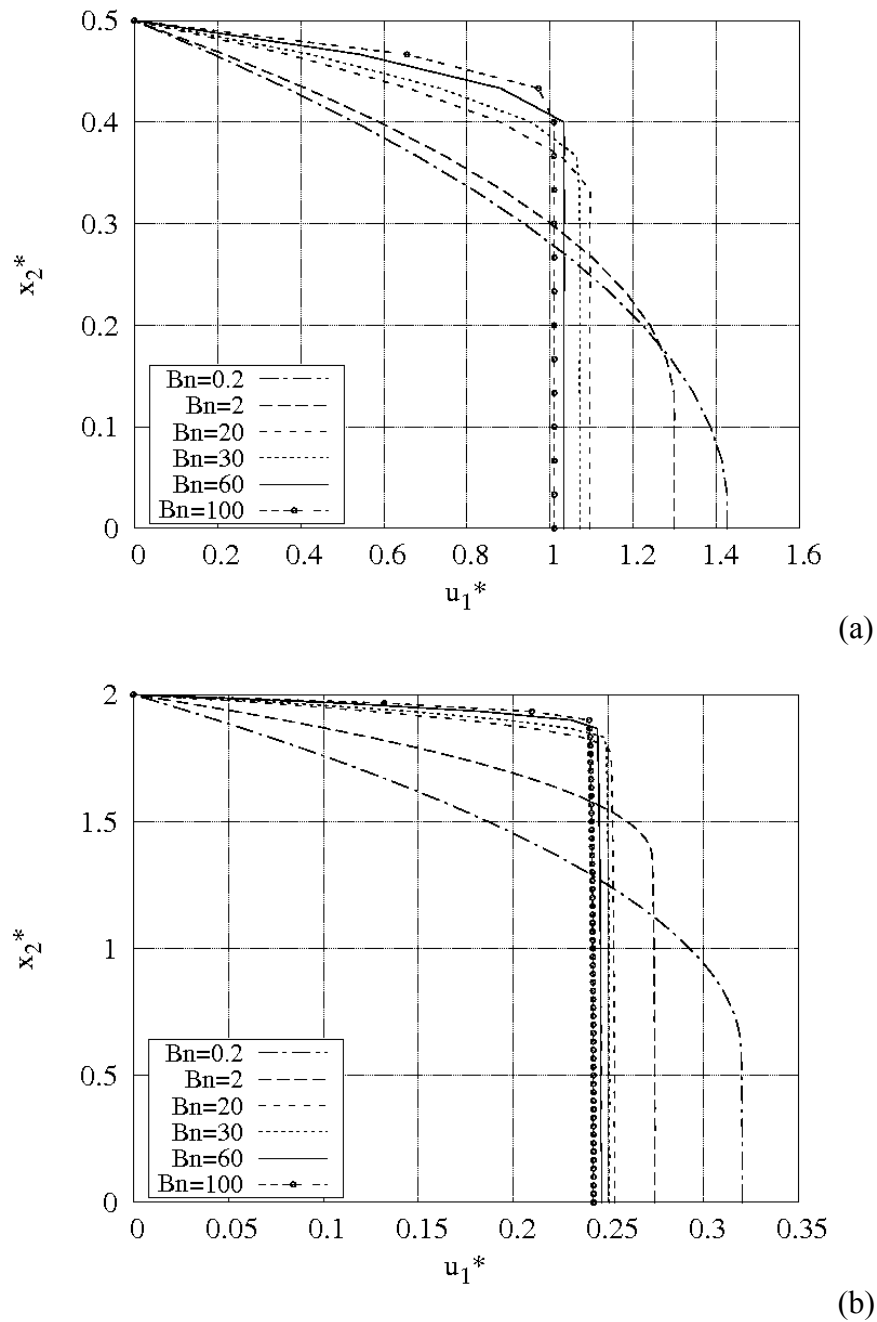


Figura 5.7. Perfis transversais de velocidade axial adimensional para $Re=0$ e $Bn=0.2-100$: (a) em $x_1^*=-10$; (b) em $x_1^*=+10$.

Outro ponto a ser destacado é que a figura 5.6 mostra claramente as pequenas regiões escoadas para os casos mais viscoplásticos (para $Bn=60$, na figura 5.6e e, para $Bn=100$, na figura 5.6f) – caracterizando camadas limite muito finas nas vizinhanças da parede do canal. Do ponto de vista numérico, esse problema resulta em simulações

computacionais difíceis no caso de escoamentos com números de Bingham muito elevados, que, para serem bem sucedidas, requerem metodologias numéricas que utilizem uma estratégia de estabilização adequada. Nestes problemas específicos, é importante enfatizar a adequação da metodologia GLS empregada para a aproximação do problema estudado neste trabalho.

A figura 5.7 investiga quantitativamente os perfis de escoamento em duas regiões de escoamento viscoplástico completamente desenvolvido, em ambos os canais. As figuras mostram perfis transversais de velocidade axial adimensionalizada ($u_1^* = u_1/u_i$) para escoamentos lentos ($Re=0$) e números de Bingham variando de $Bn=0,2$ até $Bn=100$, na posição $x_1^* = x_1/H = -10$ no canal menor e em $x_1^* = +10$ no canal maior – considerando $x_2^* = x_2/H$ em ambas as figuras. Os perfis de velocidade obedecem à regra anteriormente estabelecida, conforme esperado: quanto mais viscoplástico for o escoamento, mais achatados serão os perfis de velocidade – desde o perfil quase parabólico, no canal menor, para $Bn=0,2$ (mostrado na figura 5.7a), até o perfil fortemente achatado para $Bn=100$ (figura 5.7b).

A figura 5.7a permite observar a evolução do perfil quase parabólico – correspondente a $Bn=0,2$, valor para o qual não foi detectado escoamento pistonado no canal menor da figura 5.4a – até perfis que se tonam cada vez mais achatados à medida que o número de Bingham aumenta. Já no caso dos perfis a jusante ilustrados na figura 5.7b, não chega a haver perfil quase parabólico nem para $Bn=0,2$, o que poderia ser antecipado pela observação da figura 5.4, na qual observa-se escoamento pistonado para $Bn=0,2$ a partir de $x_2^* \approx 0.5$; enquanto para $Bn=2$, este pode ser detectado a partir de $x_2^* \approx 1.4$ e, para valores do número de Bingham maiores que 30, a partir de $x_2^* \approx 1.8$.

A comparação das figuras 5.7a e 5.7b permite observar a influência da altura do canal. Enquanto na figura 5.6a a velocidade máxima no canal menor ultrapassa ligeiramente 1,42, no caso do canal maior seu valor decai para cerca de 0,33 – uma queda de quase 77% em relação à velocidade do canal menor. Esse comportamento pode ser explicado por dois argumentos distintos. O primeiro, uma característica clássica de escoamentos incompressíveis de fluidos newtonianos, está relacionado à diminuição da velocidade causada pelo aumento da área de escoamento após a expansão. O segundo argumento é originado pelo aumento dos efeitos viscoplásticos à medida que o número de Bingham cresce, originando perfis de velocidade quase uniformes – exceto nas estreitas regiões materiais situadas nas vizinhanças da parede do canal. Como consequência, as velocidades máximas diminuem ainda mais.

A influência do número de Bingham na queda de pressão adimensional ao longo do canal é mostrada na figura 5.8 – com $x_1^* = x_1/H$. (A queda de pressão adimensional é definida como $p^* = C_p = 2(p - p_o)/\rho u_i^2$.) Em todos os casos estudados, quanto maior o número de Bingham, maiores serão as quedas de pressão – e todos os escoamentos apresentam um declive mais acentuado no canal menor.

Esse comportamento geral para a queda de pressão pode ser entendido lembrando-se que a regularização da viscosidade proposta por Papanastasiou (1987) substitui as regiões materiais não escoadas, caracterizadas por escoamentos pistonados e zonas mortas, prescritas pelo modelo original de Bingham (equação 3.17) por regiões escoadas submetidas a viscosidades muito altas (porém finitas), como definido na equação 3.20.

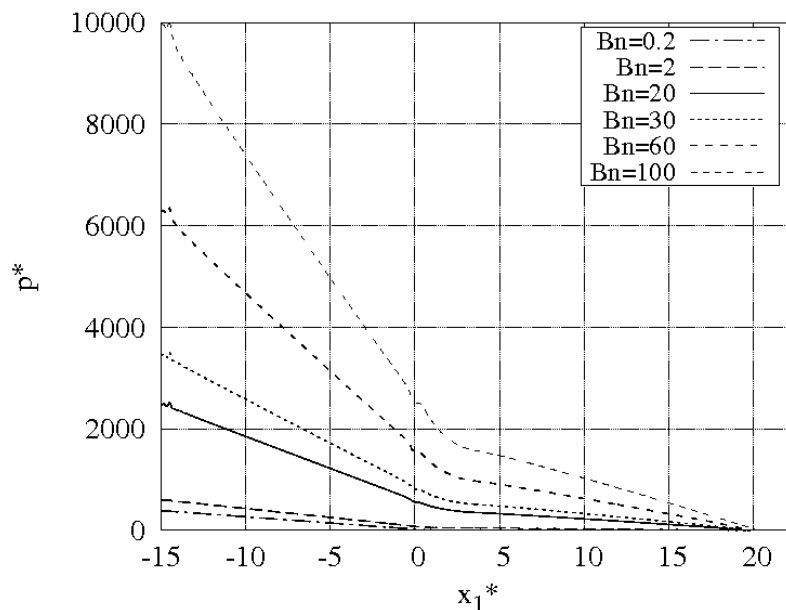


Figura 5.8. Perfil longitudinal da queda de pressão adimensional através do canal para $Re=0$ e $Bn=0,2-100$.

Assim, os escoamentos viscoplásticos são muito mais viscosos que o caso quase newtoniano (para $Bn=0,2$, na figura 5.8). Os efeitos de viscosidade crescem à medida que aumenta o número de Bingham. Conclusões análogas podem ser obtidas observando-se as ilustrações tridimensionais das superfícies de pressão apresentadas na figura 5.9, que apresenta a influência da viscoplasticidade ao longo do canal, considerando, como nos casos anteriores, escoamentos sem inércia e os mesmos valores do número de Bingham: a queda de pressão é mais acentuada à medida que a viscoplasticidade cresce, devido ao crescimento das zonas não escoadas – tanto as zonas mortas quanto as regiões de escoamento pistonado (verificado na figura 5.4).

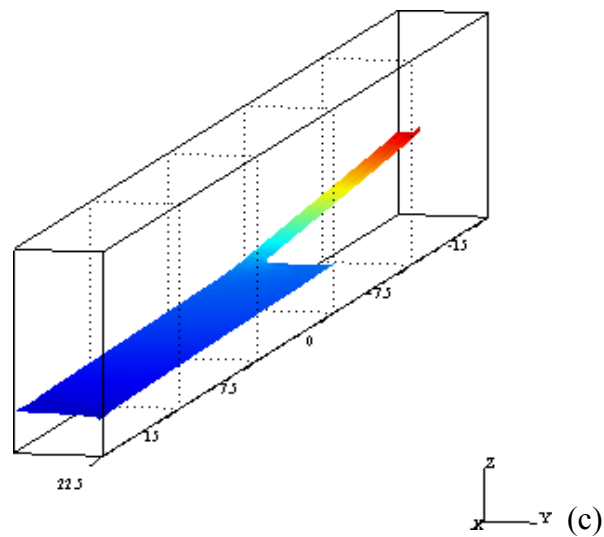
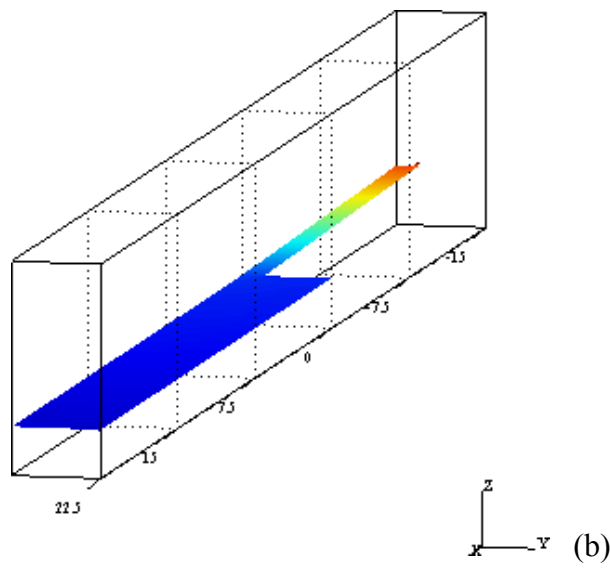
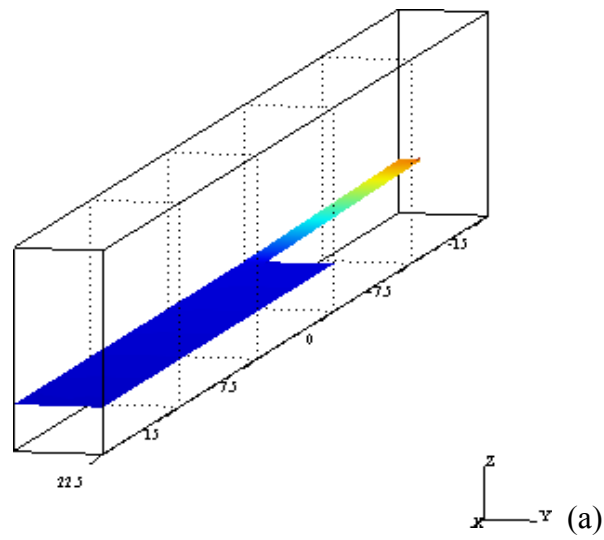


Figura 5.9. Elevações de pressão adimensional através do canal para $Re=0$:

(a) $Bn=0.2$; (b) $Bn=2$; (c) $Bn=20$.

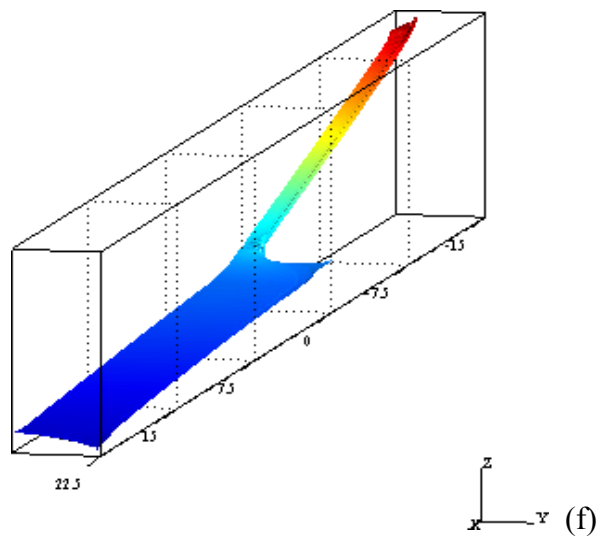
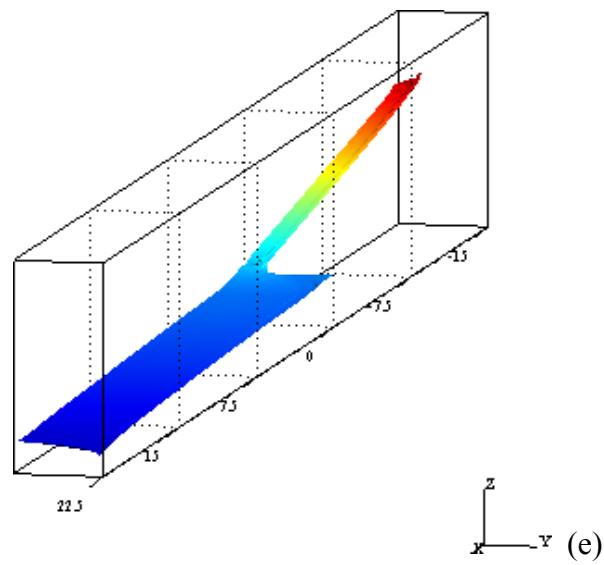
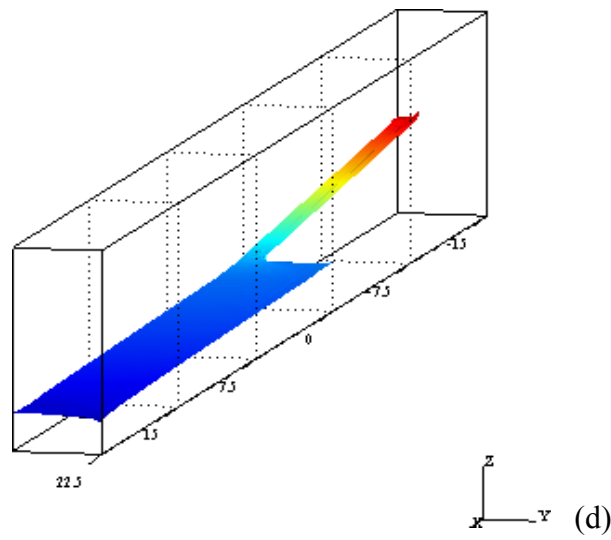


Figura 5.9. Elevações de pressão adimensional através do canal para $Re=0$:

(d) $Bn=30$; (e) $Bn=60$; (f) $Bn=100$.

A figura 5.10 analisa a influência dos efeitos de inércia na morfologia de regiões materiais escoadas e não escoadas, plotando as regiões escoadas e não escoadas, para um valor baixo do número de Bingham ($Bn=2$) e números de Reynolds variando de 0 até 50. Como ilustrado na figura, dois efeitos importantes sobre a morfologia destas regiões podem ser observados à medida que o número de Reynolds cresce. Em primeiro lugar, o deslocamento para a direita, a partir do plano de expansão, que ocorre nos escoamentos pistonados a jusante (no canal maior). O segundo efeito seria o alongamento das zonas mortas na quina da expansão, ao longo das linhas de corrente do escoamento. O primeiro efeito deve-se ao aumento do comprimento de entrada do escoamento (antes de atingir o desenvolvimento completo) no canal maior, devido ao crescimento do número de Reynolds. Estas regiões de entrada apresentam maior tensão de cisalhamento ($\tau^* > 1$) do que aquelas experimentadas nas regiões a jusante, sujeitas a escoamentos de cisalhamento puro, uma vez que, além da componente de cisalhamento τ_{12}^* , elas também estão submetidos a tensões normais não nulas τ_{11}^* e τ_{22}^* .

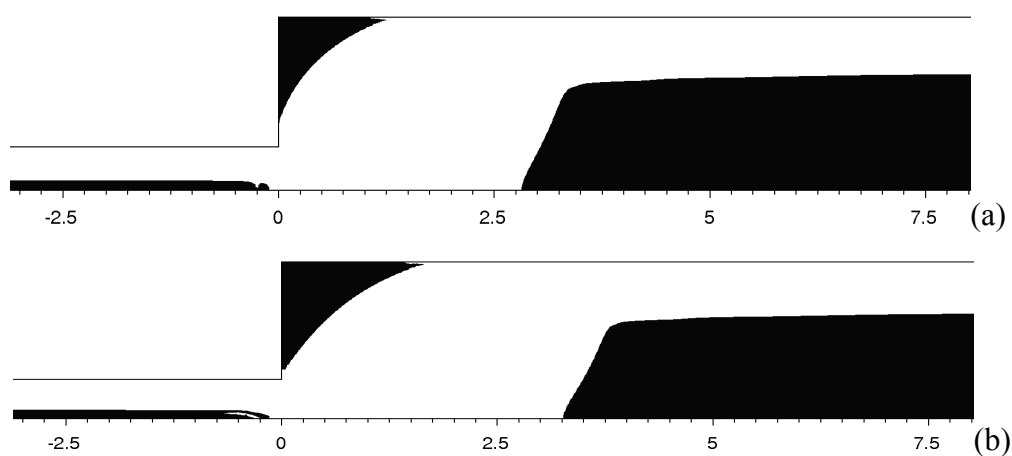


Figura 5.10. Regiões escoadas e não escoadas para $Bn=2$: (a) $Re=0$; (b) $Re=15$

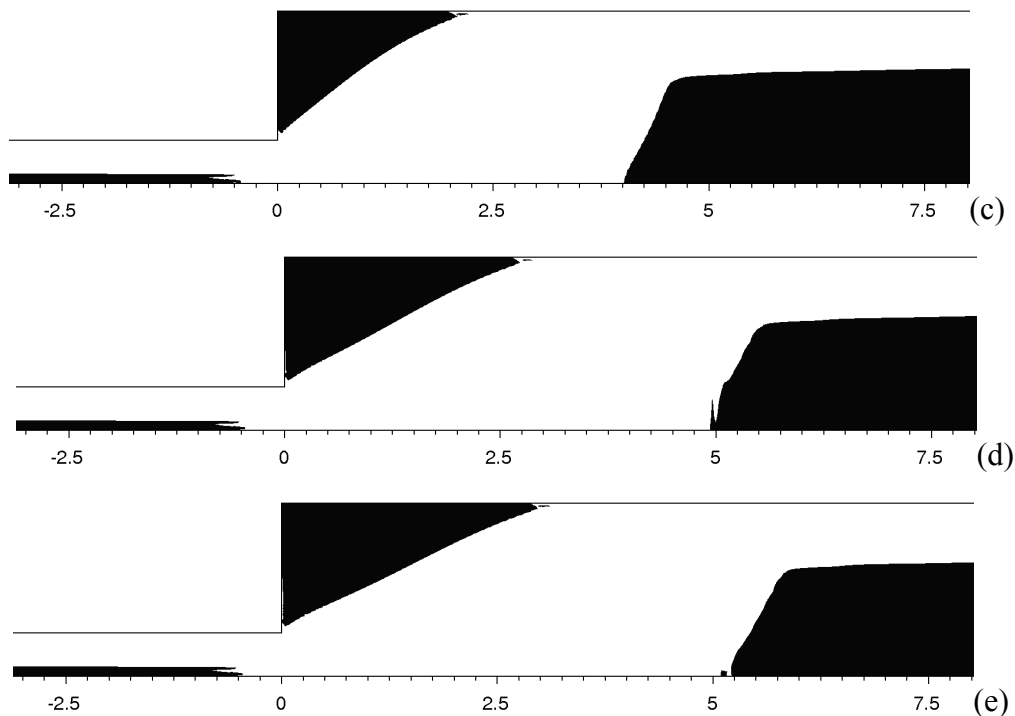
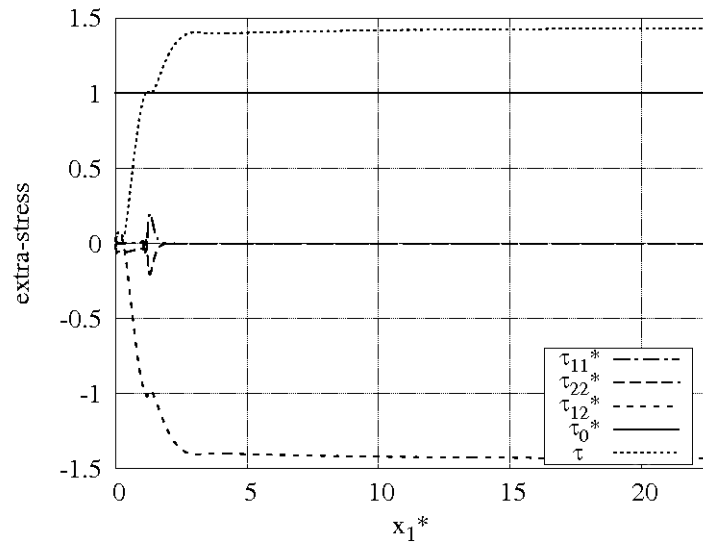


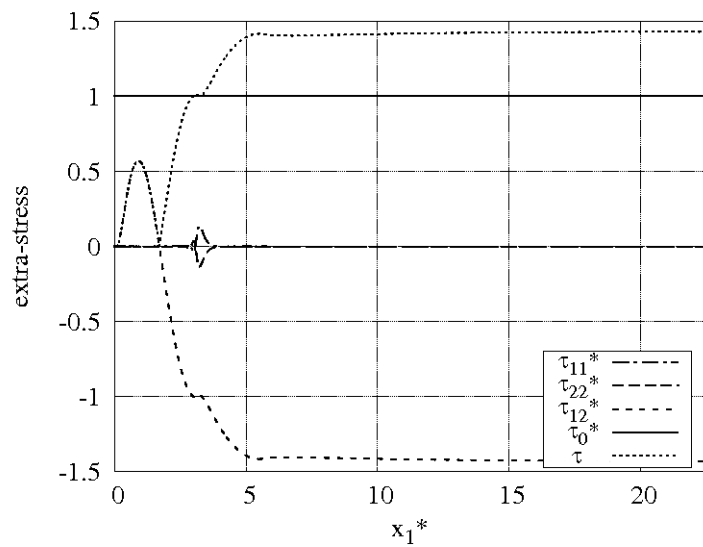
Figura 5.10. Regiões escoadas e não escoadas para $Bn=2$: (c) $Re=30$; (d) $Re=45$; (e) $Re=50$.

A validade do comentário anterior está bem ilustrada na figura 5.11, que apresenta a influência da inércia sobre os perfis de tensão extra a jusante do plano de expansão, na parede do canal ($x_2^*=2$), considerando $Bn=2$ e dois valores para o número de Reynolds, a saber: $Re=0$, mostrado na figura 5.11a e $Re=50$, na figura 5.11b. Embora o modelo de fluido newtoniano generalizado (GNL) tenha sido construído para descrever escoamentos sujeitos a cisalhamento puro e, por conseguinte, não seja o modelo mais adequado para descrever escoamentos complexos com tensões normais não nulas, a morfologia das zonas mortas na quina da expansão pode ser melhor compreendida a partir das figuras 5.10 e 5.11. Observa-se que o final de zonas mortas corresponde à intersecção entre as curvas de τ^* e τ_0^* em ambas as figuras, isto é, o ponto de intersecção $\tau^*=1$. Desta forma, com o aumento do número de Reynolds, este ponto se afasta do plano de expansão – para $Re=0$

(mostrado nas figuras 5.11a e 5.10a) sua localização é em $x_1^* \approx 1.25$ e, para $Re=50$ (apresentado nas figuras 5.11b e 5.10e), o ponto está em $x_1^* \approx 3$.



(a)



(b)

Figura 5.11. Perfis longitudinais de tensão extra em $x_2^*=2$, a jusante do plano de expansão, para $Bn=2$: (a) $Re=0$; (b) $Re=50$.

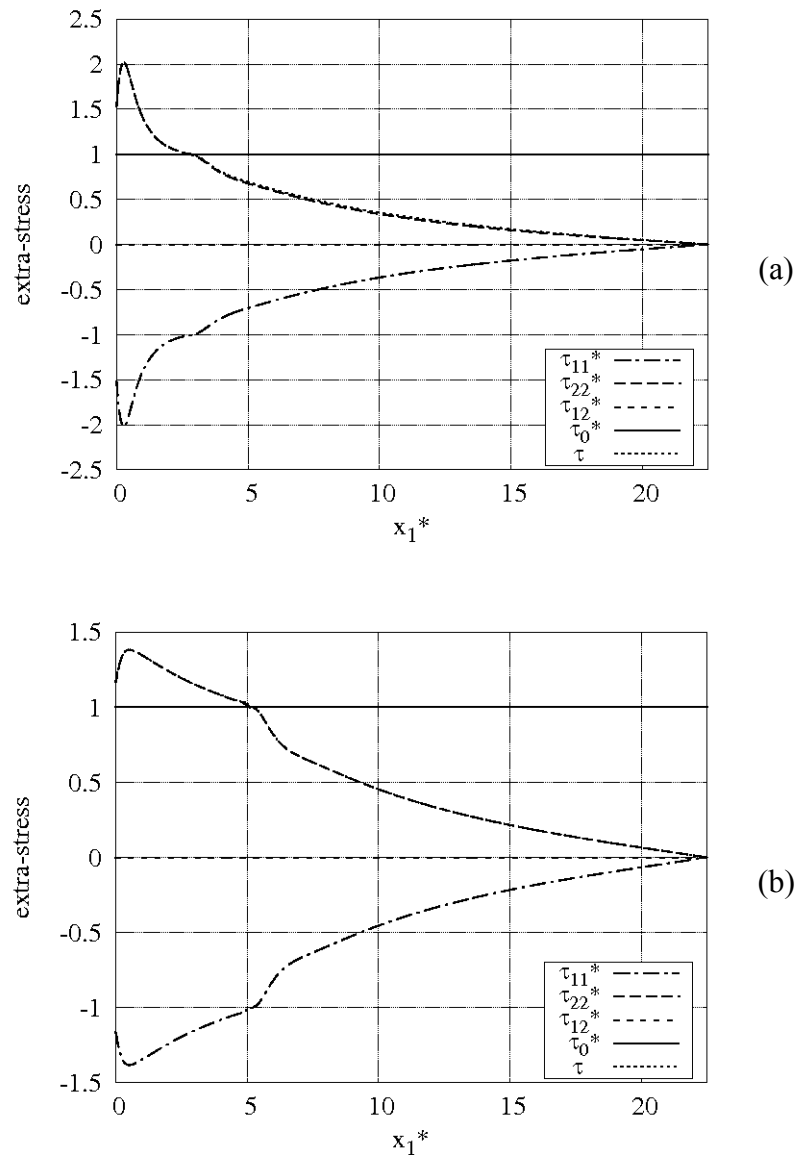


Figura 5.12. Perfis longitudinais de tensão extra em $x_2^*=0$, a jusante do plano de expansão, para $Bn=2$: (a) $Re=0$; (b) $Re=50$.

Na figura 5.12, a morfologia dos escoamentos pistonados a jusante do plano de expansão são também estudados a partir dos perfis de tensão extra. Ao contrário da figura 5.11, esses perfis estão plotados ao longo da linha de simetria do canal. Novamente, as distâncias a partir do plano de expansão podem ser verificadas comparando-se as figuras 5.12 e 5.10. Observa-se que, para $Re=0$ (figuras 5.12a e

5.10a), a interseção entre as curvas τ^* e τ_0^* está localizada próximo de $x_1^*=2,8$ e, para $Re=50$ (figuras 5.12b e 5.10e), ela se afasta ao longo das linhas de corrente, localizando-se em, aproximadamente, $x_1^*=5$.

A figura 5.13 mostra a influência da inércia no comprimento do vórtice na quina da expansão, apresentando a variação do comprimento de recolamento adimensional ($L_r^*=L_r/H$ – sendo o comprimento de recolamento, L_r , definido na figura 5.1) com o número de Reynolds. Nesta figura comparam-se resultados de comprimento de recolamento obtidos através da metodologia GLS neste trabalho considerando $Bn=0$, que corresponde ao caso de fluido newtoniano, com os resultados apresentados por Rocha et al. (2007), verificando-se uma boa concordância.

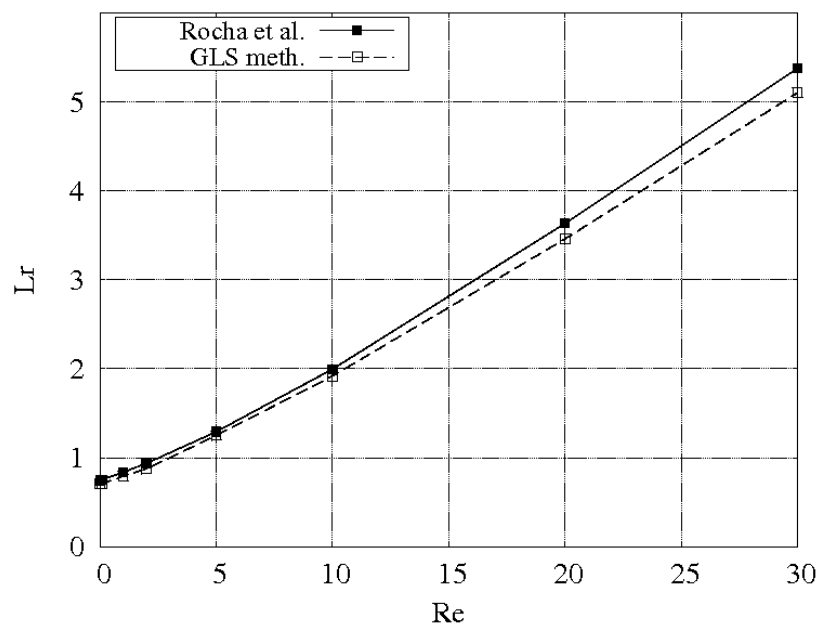


Figura 5.13. Comprimentos de recolamento versus números de Reynolds, para $Bn=0$.

A figura 5.14 mostra a influência da viscoplasticidade no comprimento do vórtice na quina da expansão, para escoamentos com inércia. Esta figura apresenta a

variação do comprimento de recolamento adimensional ($L_r^* = L_r/H$) com o número de Bingham, para um valor fixo do número de Reynolds igual a 50. Observa-se que o comprimento de recolamento diminui com o aumento do número de Bingham, devido ao aumento da tensão de escoamento do material.

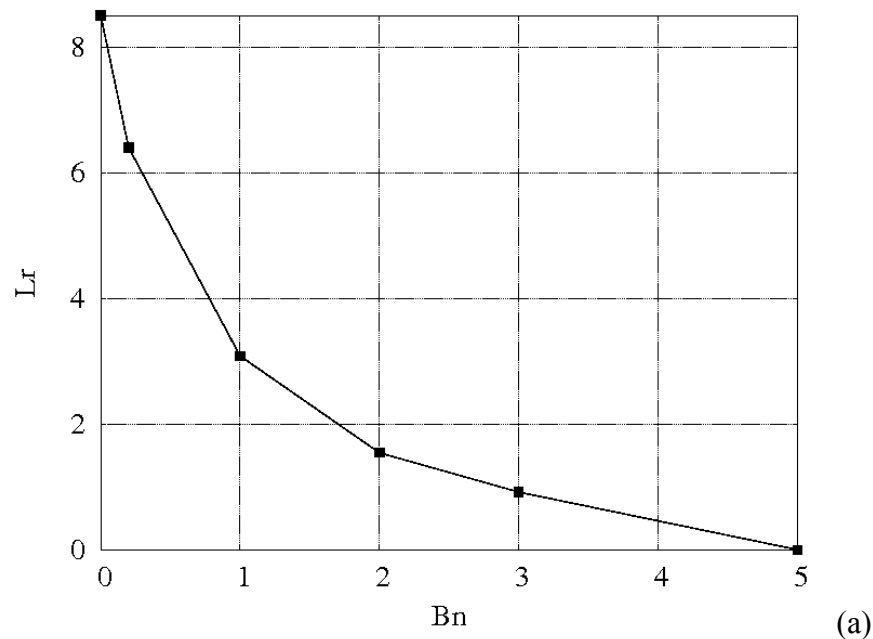


Figura 5.14. Comprimentos de recolamento versus números de Bingham, para $Re=50$.

A figura 5.14 pode ser comparada com o caso newtoniano – correspondendo a $Bn=0$ – com os resultados de Dagtekin and Ünsal (2010). Os resultados obtidos neste trabalho para o comprimento de recolamento adimensional para $Bn=0$ ($L_r=8.6$) concordam com aqueles de Dagtekin and Ünsal (2010), que obtiveram um valor de $L_r=8.785$.

Escoamentos sujeitos a tensões de escoamento limite mais elevadas apresentam zonas com viscosidade muito elevada (porém finita), restringindo, conseqüentemente, a influência local da inércia. Esse efeito pode ser notado através das linhas de corrente apresentadas para a região de recirculação, na quina da

expansão, mostradas na figura 5.15, para $Re=50$ e números de Bingham variando de 0,2 até 5,0.

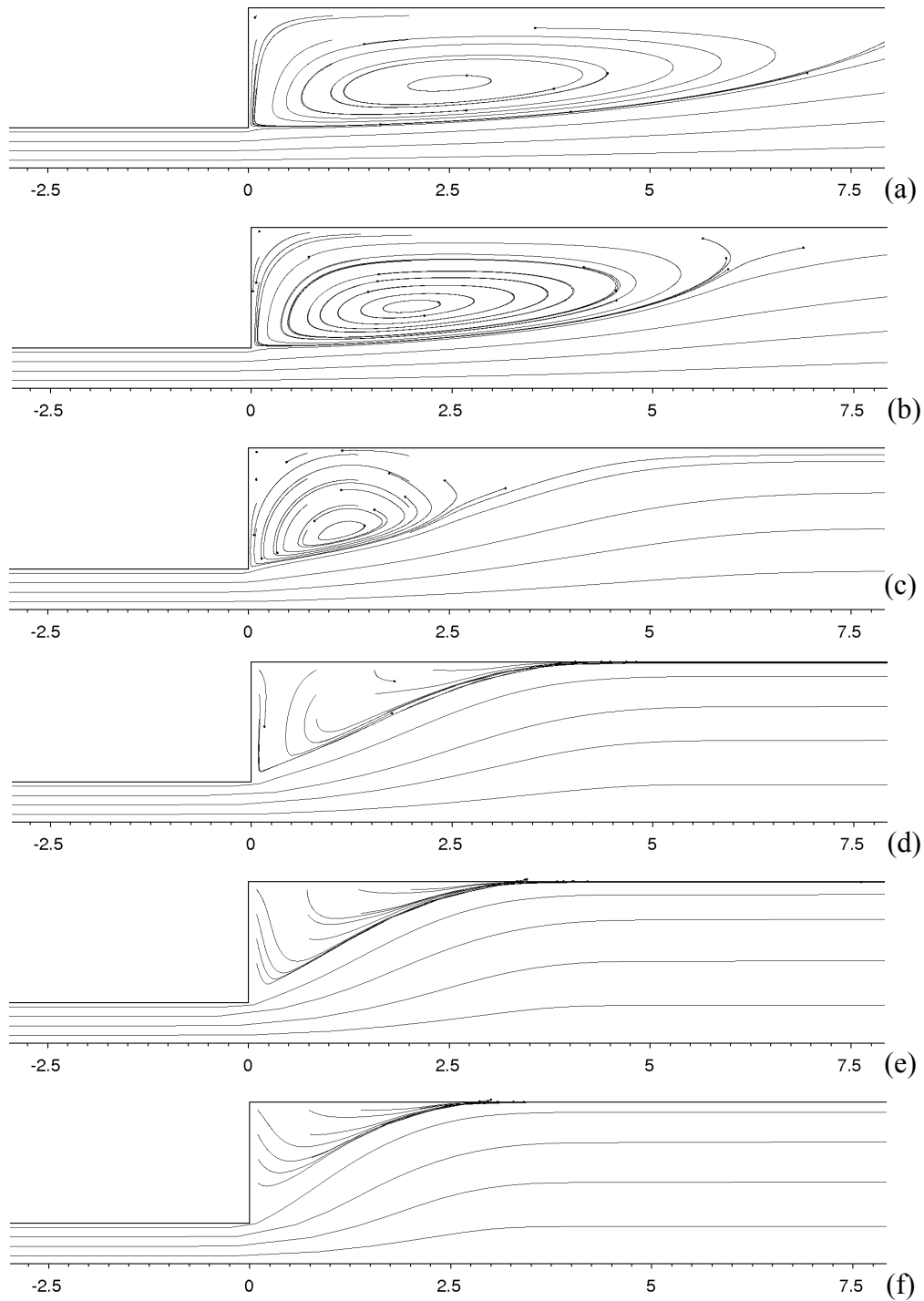


Figura 5.15. Linhas de corrente para $Re=50$: (a) $Bn=0$; (b) $Bn=0,2$ (c) $Bn=1$; (d) $Bn=2$; (e) $Bn=3$; (f) $Bn=5$.

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho, foi empregada uma metodologia multicampos de Galerkin mínimos-quadrados, em termos de três variáveis primais: tensão extra, velocidade e pressão, para aproximar escoamentos de fluidos de Bingham-Papanastasiou com inércia, através de uma expansão planar abrupta de um para quatro.

Esta formulação, que não necessita satisfazer *a priori* as condições de compatibilidade envolvendo os subespaços de elementos finitos de pressão e velocidade e de tensão e velocidade, mostrou-se capaz de permanecer estável tanto em escoamentos altamente viscoplásticos (para altos valores do número de Bingham) quanto em escoamentos com elevada inércia (sujeitos a altos valores do número de Reynolds).

As influências da inércia e da tensão de escoamento na morfologia das superfícies materiais foram avaliadas através da variação dos números de Reynolds e de Bingham, respectivamente. Para escoamentos lentos, quanto maior o aumento do número de Bingham, maior o crescimento monotônico das regiões não escoadas – tanto no caso das zonas mortas na quina da expansão quanto para os escoamentos pistonados presentes na zona central do canal com menor seção reta (antes da expansão) e do canal com maior seção reta (após a expansão). Como consequência do crescimento das regiões não escoadas, o escoamento está sujeito a maiores perdas de carga (diminuições de pressão) à medida que aumenta o número de Bingham. Para escoamentos fortemente viscoplásticos são observadas regiões escoadas apenas em finas camadas limite próximas das paredes dos canais – o restante dos dois canais sendo ocupado pelos escoamentos pistonados (caracterizando regiões com tensão de cisalhamento inferior à tensão limite). A simulação computacional adequada destas camadas limite abruptas – apresentadas nos gráficos de elevação de velocidade – mostrou a importância de utilizar uma estratégia de estabilização adequada, como é o caso da metodologia GLS empregada.

Quando a inércia é levada em conta, o aumento do número de Reynolds afasta os escoamentos pistonados do plano de expansão e as zonas mortas na quina da expansão sofrem alongamento ao longo das linhas de corrente do escoamento principal. Além disso, o comprimento de recolamento no canal maior é fortemente influenciado pelo número de Bingham, diminuindo com o aumento de B_n .

Os resultados numéricos obtidos neste trabalho confirmam dados da literatura e demonstram a estabilidade do método GLS multicampos empregado para escoamentos com altos valores de números de Bingham e de Reynolds: em todos os

casos simulados foram gerados campos estáveis para as três variáveis primais consideradas.

Como perspectivas para trabalhos futuros, a mais natural seria a aplicação da metodologia GLS multicampos a escoamentos de fluidos não newtonianos com comportamento viscoelástico. A formulação das equações do movimento em tensão, pressão e velocidade é a forma natural de apresentar as equações do movimento quando a equação constitutiva para o tensor extra de tensão é transcendental.

Outra extensão deste trabalho, de aplicação mais imediata, seria tratar escoamentos de fluidos viscoplásticos com comportamento não linear após ter sido atingida a tensão limite de escoamento. Este comportamento, normalmente pseudoplástico, pode ser modelado através das equações de Herschel-Bulkley e SMD, apresentadas no capítulo 3. Nestes modelos, a necessidade de estabilização pode ocorrer também nas regiões onde a viscosidade torna-se muito baixa devido às altas taxas de deformação experimentadas pelo material, caracterizando um comportamento fortemente pseudoplástico.

Os comportamentos elástico e viscoso representam dois extremos de resposta a tensões externas, dentre os quais estão os materiais viscoelásticos, que têm características de sólidos elásticos que durante a deformação mostram efeitos viscosos provenientes da dissipação de energia e de fluidos viscosos que exibem efeitos elásticos. Tais fluidos apresentam fenômenos mais complexos como tensões normais não nulas e recolhimento. Exemplos são os líquidos de Maxwell e Oldroyd, que têm aplicações industriais relevantes como óleos, tintas e soluções poliméricas.

Dificuldades adicionais surgem ao se considerar modelos viscoelásticos do tipo diferencial: a perda de convergência de quase todos os esquemas numéricos para altos valores do número de Deborah – quando os termos advectivos presentes na

equação constitutiva são relevantes (o número de Deborah é um parâmetro que relaciona os efeitos elásticos e os efeitos viscosos do fluido) – problema usualmente puramente numérico; possíveis problemas de convergência na vizinhança de singularidades em geometrias complexas; e o grande volume de computação envolvida nas simulações, por ser necessário obter aproximações para os campos de tensão, velocidade e pressão em cada ponto nodal, implicando na resolução de grandes sistemas não lineares acoplados.

É importante enfatizar que, apesar destes escoamentos ocorrerem, em geral, a valores baixos do número de Reynolds, sua convergência é uma tarefa complexa, pois os três campos – velocidade, pressão e tensor extra de tensões – estão fortemente acoplados e sua representação matemática resulta num sistema altamente não linear, cuja classificação matemática depende dos valores assumidos pelos parâmetros e das condições de escoamento.

Referências Bibliográficas:

- Abdali, S.S., Mitsoulis, E., Markatos, N.C., 1992, “Entry and exit flows of Bingham fluids”, *J. Rheol.*, vol.36, pp.389–407.
- Alexandrou, A.N., McGilvrey, T.M., Burgos, G.R., 2001, “Steady Herschel-Bulkley fluid flow in three-dimensional expansions”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol.100, pp.77-96.
- Allouche, M., Frigaard, A., Sona, G., 2000, “Static wall layers in the displacement of two visco-plastic fluids in a plane channel,” *J. Fluid Mech.* vol. 424, pp. 243-277.
- Anderson, D.A., Tannehill, J.C., Pletcher, R.H., 1984, “Computational fluid mechanics and heat transfer”, Hemisphere, New York.
- Araujo, J.H.C., Ruas, V., 1998, “A stable finite element method for the axisymmetric three-field Stokes system”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol.164, pp.267-286.
- Arnold, D., Brezzi, F., Fortin, M., 1984, “A stable finite element for the Stokes equations”, *Calcolo*, vol.21, pp. 337-344.
- Astarita, G., Marrucci, G., 1974, “Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics”, McGraw-Hill, Great Britain.
- Aziz, A.K., 1972, “The Mathematics Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations”, Academic Press, New York.
- Baaijens, F.T.P., 1998, “Mixed finite element methods for viscoelastic flow analysis: a review”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol.79, pp.361-385.
- Babuška, I., 1971, “Error bounds for finite elements methods”, *Numerical Mathematics*, vol.16, pp.322-333.

- Baranger J, Sandri D., 1992, "Finite element approximation of viscoelastic fluid flow. Existence of approximate solutions and error bounds-I-Discontinuous constraints", Numer. Math., vol.63, pp.13-27.
- Barnes, H.A., 1999, "A brief history of the yield stress", Appl. Rheology, Vol. 9, (6), pp.262-266.
- Barnes, H.A., 2000, "A Handbook of Elementary Rheology", Cambrian Printers.
- Bathe, K. J., Oden, J.T., Wunderlich W., 1977, "Formulation and Computational Algorithms in Finite Element Analysis", U.S. - Germany Symposium, MIT Press.
- Behr, M.A., Franca, L.P., Tezduyar, T.E., 1993, "Stabilized finite element methods for the velocity-pressure-stress formulation of incompressible flows", Comp. Meth. Appl Mech. Engng., vol.104, pp.31-48.
- Bercovier, M., Engelman, M., 1980, "A finite-element method for incompressible non-Newtonian flows", J. Comp. Phys., vol.36, pp.313-326.
- Beris, A.N., Tsamopoulos, J.A., Armstrong, R.C. Brown, R.A., 1985, "Creeping motion of a sphere through a Bingham plastic", J. Fluid Mech., vol.158, pp. 219-244.
- Beverly, C.R., Tanner, R.I., 1992, "Numerical analysis of three-dimensional Bingham plastic flow", J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol.42, pp. 85-15.
- Bird, R. B., Stewart, W. E., Lightfoot, E. N., 1960, "Transport Phenomena", John Wiley & Sons, USA.
- Bird, R.B., Armstrong, R.C., Hassager, O., 1987, "Dynamics of Polymeric Liquids", Vol. 1: "Fluid Mechanics", 2nd ed., John Wiley & Sons, USA.

- Bird, R.B., Dai, G.C., Yarusso, B.J., 1982, "The rheology and flow of viscoplastic materials", *Rev. Chem. Eng.*, vol. 1, pp. 1-70.
- Blackery, J, Mitsoulis, E., 1997, "Creeping motion of a sphere in tubes filled with Bingham plastic material", *J. Non Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 70, pp. 59-77.
- Bonvin, J., Picasso, M., Stenberg, R., 2001, "GLS and EVSS methods for a three-field Stokes problem arising from viscoelastic flows", *Comp. Meth. Appl. Mech.*, vol. 190, pp. 3893-3914.
- Brezzi, F., 1974, "On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers". *RAIRO*, 8-R2, pp. 129-151.
- Brooks, A.N., Hughes, T.J.R., 1982, "Streamline Upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equation", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* vol. 32, pp. 199-259.
- Carey, G.F., Oden, J.T., 1983, "Finite Elements: A Second Course", Prentice-Hall, New Jersey, USA.
- Caton, F., 2006, "Linear stability of circular Couette flow of inelastic viscoplastic fluids", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 134, pp. 148-154.
- Ciarlet, P.G., 1978, "The finite element method for elliptic problems", North-Holland, Amsterdam.
- Cockburn, B., Karniadakis, G.E., Shu, C.W., 2000, "The development of discontinuous Galerkin methods. In discontinuous Galerkin methods. Theory, computation and applications, em "Lecture Notes in computational Science

- and Engineering”, Vol. 11, Cockburn, B., Karniadakis, G.E., Shu, C.W. (eds.), Springer Verlag, Berlin, pp. 3-50.
- Coronado, O.M., Arora, D.; Behr, M., Pasquali, M., 2006, “Four-field Galerkin/least-squares formulation for viscoelastic fluids”, *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, vol. 140, pp. 132-144.
- Crochet, M.J., Keunings, R., 1982, “Finite element analysis of die swell of a highly elastic fluid”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 10, pp. 339-356.
- Crochet, M.J., Davies, A.R., Walters, K., 1984, “Numerical Simulation of Non-Newtonian Flow”, Elsevier Science Publisher, Netherlands.
- Dagtekin, I., Ünnsal, M., 2010, “Numerical analysis of axisymmetric and planar sudden expansion flows for laminar regime”, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, DOI: 10.1002/flid.2239.
- Dahlquist, G, Bjorck, A., 1969, “Numerical Methods”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- Denn, M.M., Tsamopoulos, J., 1990, “Issues in viscoelastic fluid mechanics”, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, vol. 22, pp. 13-34.
- Dimakopoulos, Y., Tsamopoulos, J., “Transient displacement of Newtonian and viscoplastic liquids by air in complex tubes”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 142, pp. 162-182.
- Estellé, P., Lanos, C., Perrot, A., 2008, “Processing the Couette viscometry data using a Bingham approximation in shear rate calculation”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 154, pp. 31-38.
- Ferguson, J., Kemblowski, Z., 1991, “Applied Fluid Rheology”, Elsevier Applied Science, London.

- Fortin, M., Glowinski, R., 1983, "Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems", North-Holland, Amsterdam.
- Fortin, M., Pierre, R., 1989, "On the convergence of the mixed method of Crochet and Marchal for viscoelastic flows", *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 73, pp. 341-350.
- Franca, L.P., Frey, S., 1992, "Stabilized finite element methods: II. The incompressible Navier-Stokes equations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 99, pp. 209-233.
- Franca, L.P. Frey, S., Hughes, T.J.R. 1992, "Stabilized finite element methods: I. Application to the advective-diffusive model", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 95, pp. 253-276.
- Franca, L.P., Frey S., Madureira, A., 1994, "Two- and three-dimensional simulations of the incompressible Navier-Stokes equations based on stabilized methods", *Anais da First European Computational Fluid Dynamics Conference*, pp.121-128, Bruxelles, Bélgica.
- Franca, L. P., Hauke, G., Masud , A., 2003, "Stabilized finite element methods ", em: "Finite element methods: 1970's and beyond ", L.P. Franca (Ed.) , CIMNE, Barcelona, Spain.
- Franca, L.P., Stenberg, R., 1991, "Error analysis of some galerkin least squares methods for the elasticity equations", *SIAM J. Numer. Analysis*, vol. 28, pp. 1680-1697.

- Frigaard, A., Nouar, C., 2005, "On the usage of viscosity regularization methods for visco-plastic fluid flow computation," *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* vol. 127, pp. 1-26.
- Gertzos, K.P., Nikolakopoulos, C.A., Papadopoulos, C.A., 2008, "CFD analysis of journal bearing hydrodynamic lubrication by Bingham lubricant", *Tribology International*, vol. 41, pp. 1190-1204.
- Glowinski, R., 1984, "Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems, Springer-Verlag", New York.
- Glowinski, R., Rodin, E.Y., Zienkiewicz, O.C., 1979, "Energy Methods in Finite Element Analysis", Wiley, Chichester.
- Gresho P.M., Chan, S.T., 1990, "On theory of semi-implicit projection for viscous incompressible flow and its implementation via a finite element method that also introduces a nearly consistent mass matrix. Part 2: Implementation", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 11, pp. 621-659.
- Guénette, M., Fortin, M., 1995, "A new mixed finite element method for computing viscoelastic flows", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol.60, pp.27-52.
- Gurtin, J., 1981, "An Introduction to Continuum Mechanics", Academic Press, New York.
- Hammad, K.J., 2000 , "The effect of hydrodynamic conditions on heat transfer in a complex viscoplastic flow field", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.43, pp.945-962.
- Hammad, K.J., Vradis, G.C., 1996, "Creeping flow of a Bingham plastic through axisymmetric sudden contractions with viscous dissipation", *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.39, No 8, pp.1555-1567.

- Hammad, K.J., Vradis, G.C., Otugen, M.V., 2001, "Laminar flow of a Herschel-Bulkley fluid over an axisymmetric sudden expansion". *J. Fluids Engng.*, vol. 123, pp. 588-594.
- Hughes, T.J.R., 1978, "The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA.
- Hughes, T.J.R., 1995, "Multiscale phenomena: Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scales methods, bubbles and the origins of stabilized methods", *Comput. Meth. Appl. Mech.*, vol. 127, pp. 387-401.
- Hughes, T.J.R., Brooks, A., 1982, "A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: Application to the streamline-upwind procedure", *Finite Elements in Fluids*, vol. 4, pp. 47-65.
- Hughes, T.J.R., Franca, L. P., Hulbert, G. M., 1989, "A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VII. The Galerkin/least-square method for advective-diffusive equations", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol.73, pp. 173-189.
- Hughes, T.J.R., França, L., Balestra, M., 1986, "A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, vol. 59, pp. 85-99.
- Hughes, T.J.R., Liu, W.K., Brooks, A., 1979, "Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation", *J. Comp. Phys.*, vol.30, pp.1-60.

- Hughes, T.J.R., Shakib, F., 1988, "Computational aerodynamics and the finite element method", AIAA – 26th Aerospace Sciences Meeting, USA.
- Hughes, T.J.R., 2004, "Incompressible Viscous Flow", Encyclopedia of Computational Mechanics, Eds. E. Stein, R. de Borst, T.J.R. Hughes., vol.3, pp.155-179.
- Huilgol, R.R, You, Z., 2005, "Application of the augmented Lagrangian method to steady pipe flows of Bingham, Casson and Herschel-Bulkley fluids", J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol.128, pp.126-143.
- Huilgol, R.R., 2002, "Variational inequalities in the flows of yield stress fluids including inertia: Theory and applications", Phys. Fluids, vol.14, pp.1269–1283.
- Huilgol, R.R., 2006, "A systematic procedure to determine the minimum pressure gradient required for the flow of viscoplastic fluids in pipes of symmetric cross-section", J. Non Newtonian Fluid Mech., vol.136, pp.140-146.
- Huilgol, R.R., Mena, B., 2000, "On the time estimate for start-up of pipe flows in a Bingham fluid-a proof of the result due to Glowinski, Lions and Trémolières", J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol.94, pp.113-118.
- Huilgol, R.R., Nguyen, Q.D., 2001, "Variational principles and variational inequalities for the unsteady flows of a yield stress fluid", Int. J. Nonlinear Mech., vol.36, pp. 49-67.
- Huilgol, R.R., Panizza, M.P., 1995, "On the determination of the plug flow region in Bingham fluids through the application of variational inequalities", J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol.58, pp.207-217.

- Jay, P., Magnin, A., Piau, J.M., 2001, "Viscoplastic fluid flows through a sudden axisymmetric expansion", *AIChE J.*, vol. 47, pp. 2155-2166.
- Jay, P., Piau, J.M., El Kissi, N., Cizeron, J., 1998a, "Numerical simulation of the transition from adhesion to slip with friction in generalized Newtonian Poiseuille flow", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol.77, pp. 233-251.
- Jay, P., Piau, J.M., El Kissi, N., Cizeron, J., 1998b, "The reduction of viscous extrusion stresses and extrudate swell computation using slippery exit surfaces", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 79, pp. 599-617.
- Johnson, C., 1987, "Numerical solution of partial differential equations by the finite element method", Cambridge University Press, Cambridge.
- Johnson, C., Navert, U., Pitkaranta, J., 1984, "Finite element methods for linear hyperbolic problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. 45, pp. 285-312.
- Larson, R.G., 1992, "Instabilities in viscoelastic flows", *Rheol. Acta*, vol.31, pp.213-263.
- Lipscomb, G.G., Denn, M.M., 1984, "Flow of Bingham fluids in complex geometries", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 14, pp. 337.
- Liu, B.T., Muller, S.J., Denn, M.M., 2002, "Convergence of regularization method for creeping flow of a Bingham material about a rigid sphere", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 102, pp. 179-191.
- Marchal, J. M., Crochet, M. J., 1986. "Hermitian finite elements for calculating viscoelastic flow", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 20, pp. 187-207.

- Marchal, J.M., Crochet, M.J., 1987, "A new mixed finite element for calculating viscoelastic flow", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 26, pp. 77-114.
- Mitsoulis, E., 2007, "Annular extrudate swell of pseudoplastic and viscoplastic fluids". *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, vol. 141, pp. 138-147.
- Mitsoulis, E., Huilgol, R.R., 2004, "Entry flows of Bingham plastics in expansions", *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, vol. 122, pp. 45-54.
- Mitsoulis, E., Zisis, T., 2001, "Flow of Bingham plastics in a lid-driven square cavity", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 101, pp. 173-180.
- Neofytou, P., 2005, "A 3rd order upwind finite volume method for generalized Newtonian fluid flows", *Advances Engng. Software*, vol. 36, pp. 664-680.
- O'Donovan, E.J., Tanner, R.I., 1984, "Numerical study of the Bingham squeeze film problem", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 15, pp. 75-83.
- Oden, J. T., 1991, "Finite elements: An introduction", em "Handbook of Numerical Analysis, Vol. II: Finite Element Method", ed.: P.G. Ciarlet e J. L. Lions, North Holland, Amsterdam.
- Oliveira, P.J, Pinho, F.T., 1999, "Numerical procedure for the computation of fluid flow with arbitrary stress-strain relationships", *Numer. Heat Transfer, Part B*, vol.35, pp.295-315.
- Pak, B., Cho, Y.I., Choi, S.U.S., 1990, "Separation and reattachment of non-Newtonian fluid flows in a sudden expansion pipe", *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, vol.37, pp.175-199.
- Papanastasiou, T.C., 1987, "Flows of materials with yield", *J. Rheology*, vol. 31, pp. 385-404.

- Patankar, S.V., 1980, "Numerical heat transfer and fluid flow", Hemisphere Publishing Company, New York.
- Perera, M.G.N., Walters, K., 1977, "Long Range memory effects in flows involving abrupt changes in geometry. Part 2: The expansion/contraction/expansion problem", *J. Non-Newtonian Mech.*, vol.2, pp.191-204.
- Peric, D., Slijepcevic, S., 2001, "Computational modelling of viscoplastic fluids based on a stabilised finite element method", *Engineering Computations*, vol. 18, pp. 577-591.
- Phan-Tien, N., "Understanding Viscoelasticity: Basics of Rheology", Springer Verlag Berlin Heidelberg, Germany, 2002.
- Pinho e Cruz, 2006, "Turbulência em fluidos não newtonianos", em "V Escola de Primavera em Transição e Turbulência", Ed.: A. P. Silva Freire, A. Ilha e M. J. Colaço, vol. 1, pp.253-339.
- Pinho, F.T., Oliveira, P.J., Miranda, J.P., 2003, "Pressure losses in the laminar flow of shear-thinning power-law fluids across a sudden axisymmetric expansion", *Int. J. Heat Fluid Flow*, vol.24, pp.747-761.
- Reddy, J.N., Gartling, D.K., 1994, "The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics", CRC Press Inc., USA.
- Rektorys, K., 1975, "Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering", Reidel, U.S.A.
- Roberts, G.P., Barnes, H.A., Carew, P., 2001, "Modelling the flow behaviour of very shear-thinning liquids", *Chemical Engng. Science*, vol. 56, pp. 5617-5623.

- Rocha, G. N., Poole, R. J., Oliveira, P. J., 2007, "Bifurcation phenomena in viscoelastic flows through a symmetric 1:4 expansion ", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 141, pp. 1-17.
- Roquet, N., Saramito, P., 2008, "An adaptive finite element method for viscoplastic flows in a square pipe with stick-slip at the wall", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 155, pp. 101-115.
- Ruas, V., Araujo, J.H.C., Ramos, M.A.M.S., 1993, "Approximation of the three-field Stokes system via optimized quadrilateral finite elements", *M²AM Math. Model. Numer. Analysis*, vol. 27, pp. 107-127.
- Saramito, P., Roquet, N., 2001, "An adaptive finite element method for viscoplastic fluid flows in pipes", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, vol.190, pp.5391-5412.
- Singh, J.P., Denn, M.M., 2008, "Interacting two-dimensional bubbles and droplets in yield-stress fluid", *Physics of Fluids*, vol.20, 040901/1-11.
- Slattery, J.C., 1999, "Advanced transport phenomena", Cambridge University Press, Cambridge.
- Slijepcevic e Peric, 2000, "Some aspects of computational modeling of non-Newtonian fluid based on stabilised finite element methods", *ECCOMAS 2000*, Barcelona.
- Soares, M., Naccache, M. F., Souza Mendes, P.R., 1999, "Heat transfer to viscoplastic materials flowing laminarly in the entrance region of tubes", *Int. J. Heat Fluid Flow*, vol 20, pp. 60-67.
- Souza, D.A., Soares, E.J., Queiroz, R.S., Thompson, R.L., 2007, "Numerical investigation on gas-displacement of a shear-thinning liquid and a visco-

- plastic material in capillary tubes”, *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, v. 144, pp. 149-159.
- Souza Mendes, P.R. 2007, “Dimensionless non-Newtonian fluid mechanics”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 147, pp. 109-116.
- Souza Mendes, P.R., Dutra, E.S.S., 2004, “Viscosity function for yield-stress liquids”, *Applied Rheology*, vol. 14, pp. 296-302.
- Souza Mendes, P.R., Naccache, M.F, Vargas, P.R., Marchesini, F.H., 2007a. “Flow of viscoplastic liquids through axisymmetric expansions-contractions”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 142, pp. 207-217.
- Souza Mendes, P.R., Dutra, E.S.S., Siffert, J.R.R., Naccache, M.F., 2007b, “Gas displacement of viscoplastic liquids in capillary tubes”, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 145, pp. 30-40.
- Souza Mendes, P.R., Naccache, M.F., Nieckele, A.O., Braga, C.V.M., Azevedo, L.F.A., Santos, R.L.A., 1996, “Experiments, computation and theory for flows of Bingham liquids through ideal porous media”, *Anais do ENCIT*, pp. 1581-1586.
- Souza Mendes, P.R., Naccache, M.F., Vinagre, H.T.M., 2000, “On numerical simulations of complex flows of viscoplastic materials”, *Proc. ASME-IMECE, FED*, vol. 252, pp. 17-23.
- Stein, E., de Borst, E., Hughes, T.J.R., 2004, “Encyclopedia of computational mechanics, Part 3. Fluids”, Ed.: E. Stein, R. Borst, T.J. R. Hughes.
- Tanner, R.I., 1985, “Engineering Rheology”, Clarendon Press, Oxford.
- Tezduyar, T. E., 1992, “Stabilized finite element formulations for incompressible flow computations”, *Adv. Appl. Mech.*, Vol. 28, pp.1-41.

- Vradis, G.C., Otugen, M.V., 1997, "The axisymmetric sudden expansion flow of a non-Newtonian viscoplastic fluid", *J. Fluids Engng.*, vol. 119, pp. 193-200.
- Wilkins, R.J., Miller, J.D., Plummer, J.R., Dietz, D.C., Myers, K.J., 2005, "New techniques for measuring and modeling cavern dimensions in a Bingham plastic fluid", *Chemical Engng. Sci.*, vol. 60, pp. 5269-5275.
- Wilson, S.D.R., Taylor, A.J., 1996, "The channel entry problem for a yield stress fluid", *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, vol. 65, pp. 165-176.
- Zienkiewicz, O., Taylor, R., 1994, "El método de los elementos finitos, vol. 1. Formulación básica y problemas lineales", CIMNE, Barcelona, España, 4^a Edition.
- Zinani, F., Frey, S., 2006, "Galerkin least-squares finite element approximations for isochoric flows of viscoplastic fluids", *J. Fluids Engng.*, vol. 128, pp. 853-863.
- Zinani, F., Frey, S., 2007, "Galerkin least-squares solutions for purely viscous flows of shear-thinning fluids and regularized yield stress fluids", *J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng.*, vol. 29/4, pp. 432-443.
- Zinani, F., Frey, S., 2008, "Galerkin least-squares multi-field approximations for flows of inelastic non-Newtonian fluids", *J. Fluids Engng.*, vol. 130, pp. 081507/1-14.
- Zizis, T., Mitsoulis, E., 2002, "Viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates", *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, vol. 105, pp. 1-20.